DEĞİŞKEN KESİTLİ ÇUBUKLARIN VE ÇATLAKLI KİRİŞLERİN TİTREŞİM ANALİZİ

Çağlar KAHYA

T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞKEN KESİTLİ ÇUBUKLARIN VE ÇATLAKLI KİRİŞLERİN TİTREŞİM ANALİZİ

Çağlar KAHYA
0000-0002-0722-7094

Prof. Dr. Yaşar PALA
(Danışman)

DOKTORA TEZİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

BURSA – 2023
Her Hakkı Saklıdır

B.U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

27/03/2023

Çağlar KAHYA

ÖZET

Doktora Tezi

DEĞİŞKEN KESİTLİ ÇUBUKLARIN VE ÇATLAKLI KİRİŞLERİN TİTREŞİM ANALİZİ

Çağlar KAHYA

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yaşar PALA

Bu tez çalışmasında değişken kesitli çubukların boyuna titreşimi ve çatlaklı Timoshenko kirişlerin yanal titreşimleri üzerine çalışılmıştır. Değişken kesitli çubukların boyuna titreşimi için yeni bir analitik yöntem sunulmuştur. Bu yöntemde çubuk için yazılan diferansiyel denklem Riccati diferansiyel denklemine dönüştürülmüş ve son yıllarda bu tip diferansiyel denklemler için geliştirilen bir yöntem çözüm için uygulanmıştır. Çatlaklı Timoshenko kirişler için ise, genel şekil değiştirebilen sınır şartlarına sahip keyfi sayıda çatlak bulunan bir kirişin frekans ve mod şekilleri için denklemler elde edilmiştir. Kirişin doğal frekansları üzerine sınır şartları ve çatlak parametrelerinin etkileri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Serbest Titreşim, değişken kesitli çubuk, Timoshenko kiriş, sönümlü titreşim
2023, xiii + 99 sayfa.

ABSTRACT

PhD Thesis

VIBRATION ANALYSIS OF BARS OF VARIABLE CROSS-SECTIONS AND BEAMS WITH CRACKS

Çağlar KAHYA

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mechanical Engineering

Supervisor: Prof. Dr. Yaşar PALA

In this thesis, the longitudinal vibration of bars with variable cross-section and lateral vibration of cracked Timoshenko beams are studied. A new analytical method is presented for the longitudinal vibration of bars with variable cross sections. In this method, the differential equation written for the bar is transformed into the Riccati differential equation, and a method developed for these types of differential equations in recent years has been applied to the solution. For cracked Timoshenko beams, equations for the frequency and mode shapes are obtained with the general elastically restrained boundary conditions for a beam with an arbitrary number of cracks. The effects of the boundary conditions and crack parameters on the natural frequencies of the beam have been investigated.

Key words: Free vibration, bar of variable cross-section, Timoshenko beam, damped vibration
2023, xiii + 99 pages.

ÖNSÖZ ve/veya TEŞEKKÜR

Lisansüstü öğrenimim boyunca bana her konuda yardımcı olan, bilgi ve deneyimlerini her zaman paylaşan değerli danışman hocam Prof. Dr. Yaşar PALA'ya teşekkürlerimi sunarım.

Bugünlere gelmemde bana her zaman destek olan aileme ve bu zamana kadar geçen sürede üzerimde emeği olan tüm hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Çağlar KAHYA
27/03/2023

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET....vi
ABSTRACT....vii
ÖNSÖZ ve/veya TEŞEKKÜR....viii
İÇİNDEKİLER....ix
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ....x
ŞEKİLLER DİZİNİ....xi
ÇİZELGELER DİZİNİ....xii
1. GİRİŞ....1
2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRMASI....3
2.1. Kaynak Özetleri....3
2.2. Çubukların Boyuna Titreşimi....7
2.3. Timoshenko Kiriş Teorisi....9
3. MATERYAL ve YÖNTEM....12
3.1. Değişken Kesitli Çubukların Boyuna Titreşimi....12
3.1.1. Sabit kesitli bir çubuğun boyuna titreşimi....15
3.1.2. Kesit alanı değişimi $A(x) = \left(\sqrt{A_0} + cx\right)^2$ şeklinde olan bir çubuğun boyuna titreşimi....16
3.1.3. Kesit alanı değişimi $A(x) = A_0 e^{-k_0 x}$ şeklinde olan bir çubuğun boyuna titreşimi....17
3.1.4. Kesit alanı değişimi $A(x) = A_0 \sinh^2(px + r)$ şeklinde olan bir çubuğun boyuna titreşimi....19
3.1.5. Kesit alanı değişimi $A(x) = A_0 \sin^2(px + r)$ şeklinde olan bir çubuğun boyuna titreşimi....20
3.1.6. Kesit alanı değişimi $A(x) = A_0 (1 - x)^{-2}$ şeklinde olan bir çubuğun boyuna titreşimi....21
3.1.7. $A''/A - A'^2/(2A^2)$ ifadesinin sabit bir sayıya eşit olduğu durum....22
3.1.8. Değişken kesitli kademeli bir çubuğun frekans analizi....25
3.2. Timoshenko Kiriş Teorisi İçin Çözüm....28
3.2.1. Timoshenko kirişleri için diklik (orthogonality) şartları....32
3.3. Çatlaklı Kirişlerin Titreşimi....34
3.3.1. Çatlaklı kirişlerin doğal frekanslarının bulunması....34
3.3.2. Çatlaklı kirişlerin mod şekillerinin bulunması....47
4. BULGULAR ve TARTIŞMA....54
4.1. Çubuklar İçin Sayısal Örnekler ve Parametrelerin Etkisi....54
4.2. Kirişler İçin Sayısal Örnekler ve Parametrelerin Etkisi....57
5. SONUÇ....77
KAYNAKLAR....79
EKLER....82
EK 1. Riccati Diferansiyel Denklemi Çözümü İçin Özet Bilgi....83
EK 2. Diklik Şartının Elde Edilmesi....85
EK 3. Matlab Programları....90
ÖZGEÇMİŞ....99

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
A	Kesit alanı
E	Elastisite modülü
G	Kayma modülü
I	Alan atalet momenti
k	Timoshenko kayma katsayısı
L	Kiriş ve çubuk boyu
M	Eğilme momenti
$\overline{M}$	Eğilme momenti fonksiyonu
P	Eksenel kuvvet
t	Zaman
u	Eksenel yer değiştirme
V	Kesme kuvveti
$\overline{V}$	Kesme kuvveti fonksiyonu
y	Yanal yer değiştirme
Y	Yanal yer değiştirme fonksiyonu
γ	Kayma açısı
ε	Birim şekil değiştirme
θ	Kirişin eğilmeden dolayı oluşan dönme açısı
ρ	Yoğunluk
σ	Gerilme
ϕ	Eksenel yer değiştirme fonksiyonu
Ψ	Dönme açısı fonksiyonu

Kısaltmalar	**Açıklama**
DQM	Diferansiyel kuadratür yöntemi
FEM	Sonlu elemanlar analizi
DTM	Diferansiyel dönüşüm yöntemi

ŞEKİLLER DİZİNİ

		Sayfa
Şekil 2.1.	Boyuna titreşen çubuk üzerinden seçilen sonsuz küçük eleman	7
Şekil 2.2.	Timoshenko kiriş diferansiyel elemanı.	9
Şekil 3.1.	Farklı k, A_0 ve c_1 için kesit alanı değişimleri.	24
Şekil 3.2.	Çift kademeli değişken kesitli çubuk.	25
Şekil 3.3.	Çatlaklı kiriş.	35
Şekil 3.4.	Çatlaklı kiriş modeli.	35
Şekil 3.5.	Çok sayıda çatlak içeren kiriş	38
Şekil 3.6.	Parçalara ayrılmış kirişler	38
Şekil 3.7.	Uçlarında yay-kütle-damper bulunan ve şekil değiştirebilen sınır şartlarına sahip kiriş modeli.	44
Şekil 4.1.	$d_{1,1} = d_{2,1} = 0{,}1$, $d_{R1,1} = d_{R2,1} = 0{,}01$, $d_{1,2} = d_{2,2} = 0{,}1$ ve $d_{R1,2} = d_{R2,2} = 100$ sınır şartları için mod şekilleri. a) $e = 0{,}4$ ve $\alpha = 0{,}5$ için mod şekilleri b) $e = 0{,}8$ ve $\alpha = 0{,}5$ için mod şekilleri	75
Şekil 4.2.	$d_{1,1} = d_{2,1} = 0{,}1$, $d_{R1,1} = d_{R2,1} = 0{,}01$, $d_{1,2} = d_{2,2} = 0{,}1$ ve $d_{R1,2} = d_{R2,2} = 100$ sınır şartları için mod şekilleri. a) $e = 0{,}2$ ve $\alpha = 0{,}3$ için mod şekilleri b) $e = 0{,}2$ ve $\alpha = 0{,}7$ için mod şekilleri	75
Şekil 4.3.	$d_{1,1} = d_{2,1} = 0{,}1$, $d_{R1,1} = d_{R2,1} = 0{,}01$, $d_{1,2} = d_{2,2} = 0{,}1$ ve $d_{R1,2} = d_{R2,2} = 100$ sınır şartları, $e = 0{,}3$, $\alpha = 0{,}5$ ve $d_{01,1} = d_{02,1} = 100$ için mod şekilleri. a) $d_{M1} = d_{M2} = 30$ için mod şekilleri b) $d_{M1} = d_{M2} = 200$ için mod şekilleri.	76

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

Çizelge 4.1. Sabit-serbest sınır şartları altında ve kesit alanı $A(x) = (1 + \alpha x/L)^2$ olan çubuk için boyutsuz doğal frekanslar. 55
Çizelge 4.2. Sabit-serbest sınır şartları altında ve kesit alanı $A(x) = A_0 e^{-k_0 x}$ olan çubuk için boyutsuz doğal frekanslar. 55
Çizelge 4.3. Sabit-serbest sınır şartları altında ve kesiti $A(x) = A_0 \sinh^2(px + r)$ olarak değişen bir çubuğun boyutsuz doğal frekansları. 56
Çizelge 4.4. Sabit-serbest sınır şartları altında ve kesiti $A(x) = A_0 \sin^2(px + r)$ olarak değişen bir çubuğun boyutsuz doğal frekansları. ($r = 1$ ve $L = 1$) 56
Çizelge 4.5. Sabit-serbest sınır şartlarına sahip ve kesit alan değişimi her kademe için $A_i(x) = \left(\sqrt{A_0} + c_i x\right)^2$ olan çift kademeli çubuğun boyutsuz doğal frekansları 57
Çizelge 4.6. Lineer yayın çatlaksız kiriş frekanslarına etkisi 58
Çizelge 4.7. Burulma yayının çatlaksız kiriş frekanslarına etkisi 58
Çizelge 4.8. Lineer sönüm elemanının çatlaksız kiriş frekanslarına etkisi..... 59
Çizelge 4.9. Burulma sönüm elemanının çatlaksız kiriş frekanslarına etkisi 59
Çizelge 4.10. Lineer yayın çatlaklı kiriş frekanslarına etkisi 60
Çizelge 4.11. Burulma yayının çatlaklı kiriş frekanslarına etkisi..... 60
Çizelge 4.12. Lineer sönüm elemanının çatlaklı kiriş frekanslarına etkisi..... 61
Çizelge 4.13. Burulma sönüm elemanının çatlaklı kiriş frekanslarına etkisi 61
Çizelge 4.14. Uç kütlenin çatlaklı kiriş frekanslarına etkisi..... 62
Çizelge 4.15. Kiriş uçlarındaki yay-kütle-damper sistemindeki yayın çatlaklı kiriş frekanslarına etkisi..... 63
Çizelge 4.16. Kiriş uçlarındaki yay-kütle-damper sistemindeki sönüm elemanının çatlaklı kiriş frekanslarına etkisi..... 64
Çizelge 4.17. Simetrik sınır şartlarında, α = 0,3 - 0,5 - 0,7 ve e = 0,2 - 0,4 - 0,6 - 0,8 değerleri için frekans değerleri..... 65
Çizelge 4.18. Simetrik sınır şartlarında, α = 0,3 - 0,5 - 0,7 ve e = 0,1 - 0,3 - 0,5 - 0,7-0,9 değerleri için frekans değerleri..... 66
Çizelge 4.19. Simetrik sınır şartlarında, e = 0,2 ve α = 0,1 - 0,3 - 0,5 - 0,7 - 0,9 değerleri için frekans değerleri..... 67
Çizelge 4.20. Simetrik sınır şartlarında, e = 0,5 ve α = 0,1 - 0,3 - 0,5 - 0,7 - 0,9 değerleri için frekans değerleri..... 67
Çizelge 4.21. Simetrik sınır şartlarında, e = 0,8 ve α = 0,1 - 0,3 - 0,5 - 0,7 - 0,9 değerleri için frekans değerleri..... 68
Çizelge 4.22. Simetrik sınır şartlarında, e = 0,2 ve α = 0,2 - 0,4 - 0,6 - 0,8 değerleri için frekans değerleri..... 68
Çizelge 4.23. Simetrik sınır şartlarında, e = 0,5 ve α = 0,2 - 0,4 - 0,6 - 0,8 değerleri için frekans değerleri..... 69
Çizelge 4.24. Simetrik sınır şartlarında, e = 0,8 ve α = 0,2 - 0,4 - 0,6 - 0,8 değerleri için frekans değerleri..... 69
Çizelge 4.25. Simetrik olmayan sınır şartlarında, α = 0,3 - 0,5 - 0,7 ve e = 0,2 - 0,4 - 0,6 - 0,8 değerleri için frekans değerleri 70
Çizelge 4.26. Simetrik olmayan sınır şartlarında, α = 0,3 - 0,5 - 0,7 ve e = 0,1 - 0,3 - 0,5 - 0,7 - 0,9 değerleri için frekans değerleri..... 71

Çizelge 4.27. Simetrik olmayan sınır şartlarında, e = 0,2 ve α = 0,1 - 0,3 - 0,5 - 0,7 - 0,9 değerleri için frekans değerleri 72
Çizelge 4.28. Simetrik olmayan sınır şartlarında, e = 0,5 ve α = 0,1 - 0,3 - 0,5 - 0,7 - 0,9 değerleri için frekans değerleri 72
Çizelge 4.29. Simetrik olmayan sınır şartlarında, e = 0,8 ve α = 0,1 - 0,3 - 0,5 - 0,7 - 0,9 değerleri için frekans değerleri 73
Çizelge 4.30. Simetrik olmayan sınır şartlarında, e = 0,2 ve α = 0,2 - 0,4 - 0,6 - 0,8 değerleri için frekans değerleri 73
Çizelge 4.31. Simetrik olmayan sınır şartlarında, e = 0,5 ve α = 0,2 - 0,4 - 0,6 - 0,8 değerleri için frekans değerleri 74
Çizelge 4.32. Simetrik olmayan sınır şartlarında, e = 0,8 ve α = 0,2 - 0,4 - 0,6 - 0,8 değerleri için frekans değerleri 74

1. GİRİŞ

Sabit veya değişken kesitli çubukların boyuna titreşimi ile kirişlerin yanal titreşimleri birçok alanda kullanım olanaklarından dolayı uzun süredir ilgi görmektedir. Bu ilginin başlıca sebepleri arasında çalışma şartlarına göre yapının hasara uğrayıp uğrayamayacağını bilmek ya da yapı üzerinde herhangi bir kusur var mı sorusuna cevap verebilmek gelmektedir.

Bir yapının doğal frekansı ile dışarıdan tahrik ile uyarılmış yapının frekansı aynı olursa, yapıda aşırı yer değiştirmeler ve hasar oluşur. Bu olaya rezonans denilmektedir. Bu olay yaşanması istenmeyen bir durum olduğundan, yapının tasarım ya da işletme durumunda değişiklikler yapılarak, çalışma esnasındaki frekanslarının yapının doğal frekansları ile çakışmaması için çeşitli önlemler alınması gerekebilmektedir. Bu sebeple yapıların hem doğal frekansları hem de zorlanmış frekanslarının hesabına yönelik birçok araştırmacı uzun yıllardır çalışmalar yapmaktadır.

Birçok yapı basitleştirilmiş şekilde çubuk ve kiriş elemanlar ile modellenebilmektedir. Bu sebeple çubukların ve kirişlerin titreşim problemleri analitik veya sayısal olarak birçok çalışmada incelenmiştir. Doğrudan yapının frekanslarının elde edilmesi çalışmalarının yanında son yıllarda yine yapıların frekanslarına göre, o yapı üzerinde herhangi bir çatlak gibi yapıdaki sürekliliği bozan kusurların var olup olmadığı da çalışılmaktadır. Bunun için de yapının bilinen frekansları üzerinden analizler gerçekleştirilebilmektedir.

Bu tez çalışması kapsamında değişken kesitli çubukların boyuna titreşimleri ile çatlaklı Timoshenko kirişlerin yanal titreşimleri incelenmiştir. Çubuklar için yapılan çalışmada, dış kuvvet etkisi olmadığı durum için bulunan diferansiyel denklem, bir dönüşüm denklemi kullanılarak Riccati diferansiyel denklem tipine dönüştürülmüş ve elde edilen bu denklemin çözümü için de daha önce bu tip diferansiyel denklemlerin çözümü için Pala ve Ertas (2017) tarafından geliştirilen bir yöntem temel alınmıştır. Bu yöntem kullanıldığında arada başka dönüşüm denklemleri kullanılmakta olup sonucunda ikinci mertebeden bir diferansiyel denklemin çözülmesi gerekmektedir. Bu ikinci mertebeden

diferansiyel denklemin tipi çubuğun kesit alanına bağlı olarak sabit katsayılı veya değişken katsayılı olabilmekte, buna bağlı olarak da analitik olarak çözüm elde edilebilecek olan kesit tiplerinin belirlenebilmesinin imkânını sağlamaktadır. Bu düşünce ile çözümü rahatlıkla elde edilebilecek en basit formda olan sabit katsayılı ikinci mertebeden diferansiyel denklemi getirecek bazı değişken kesit alanlarına sahip çubukların serbest titreşimleri incelenmiştir. İlave olarak değişken katsayılı olduğu durum için de bir örnek verilmiştir. Önerilen bu yeni yöntem analitik veya sayısal olarak çözülebilecek kiriş tiplerinin belirlenebilmesine imkân sunarken, literatürdeki karmaşık çözüm yöntemlerine de bir alternatif oluşturmaktadır. Kiriş analizinde ise, daha bodur olarak tanımlanabilen, kesit alanı boyutlarının kirişin boyu ile kıyaslandığında küçük olmadığı kirişlerde kayma şekil değişimlerinin ve dönme ataletlerinin de ihmal edilmeden hesaplara dahil edilmesi gerekmektedir (Rao, 2011). Bu sebeple bu etkilerin de hesaba katıldığı Timoshenko kiriş teorisi bu çalışmada kullanılmıştır. Üzerinde keyfi sayıda tek taraflı çatlak bulunan elastik sınır şartlarına ve uçlarında yay kütle damper sistemine sahip Timoshenko kirişlerin doğal frekansları transfer matris yöntemi kullanılarak bulunmuş, daha sonra sınır şartları ile çatlak derinliği ve konumu gibi parametrelerin doğal frekanslar üzerine etkileri sayısal örnekler ile gösterilerek hakkında fikir sahibi olunulması istenilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRMASI

2.1. Kaynak Özetleri

Çubukların boyuna titreşimi için literatürde analitik ve sonlu elemanlar (FEM), diferansiyel kuadratür (DQM), Pseudo-spectral yöntemi, diferansiyel transform yöntemi gibi sayısal çözümler mevcuttur.

Raman (1983) kesiti eksenel yönde değişen çubukların analitik çözümlerini incelemiştir. Çubuk için yazılan hareket denklemi ile Schrödinger ve Sturm-Liouville denklemleri arasında ilişki kurmaya yardımcı dönüşümler kullanarak analizi gerçekleştirmiştir.

Eisenberger (1991) değişken kesitli yapıların eksenel katılıklarının bulunması için bir yöntem sunmuş ve boyuna titreşen çubukların frekanslarının bulunması için çözüm yapmıştır.

Bapat (1995) keyfi sayıda düzgün olarak değişen kirişlerden oluşan sistemin boyuna titreşimi için bir yaklaşım geliştirmiştir. Sabit kesitli, konik, üstel ve katenoidal değişen kesitleri incelemiştir.

Abrate (1995) bazı değişken kesitli çubukların hareket denklemlerinin dalga denklemine dönüştürülebileceğini göstermiştir. Sabit-serbest ve sabit-sabit sınır koşullarına sahip çubukların en düşük frekans modları kesit değişiminden etkilenirken yüksek modların daha az etkilendiği belirtilmiştir.

Kumar ve Sujith (1997) polinom alan varyasyonlu çubuk ve sinüzoidal çubuklar için trigonometrik ve Bessel fonksiyonları gibi özel fonksiyonlar cinsinden çözüm elde etmiştir. Yüksek modlar için, doğal frekansların üniform çubuğun frekanslarına yakın olduğunu belirtilmiştir. Arndt ve ark. (2010) da yaptıkları çalışmada kesit alanı sinüzoidal ve polinom şeklinde değişen çubukların serbest boyuna titreşimlerini genelleştirilmiş sonlu elemanlar yöntemini kullanarak incelemiştir.

Zeng ve Bert (2001) boyuna titreşen sabit-serbest mesnetli konik (tapered bar) çubukların serbest titreşiminin elde edilmesi için diferansiyel dönüşüm yöntemi (DTM) uygulamıştır. Al Kaisy ve ark. (2007) genel değişken kesitli çubukların boyutsuz doğal frekansları ve normalleştirilmiş mod şekillerini, serbest-sabit mesnetli sınır şartlarına sahip çubuk için diferansiyel kuadratür yöntemini (DQM) kullanarak elde etmiştir. Caliò ve Elishakoff (2008) sabit-sabit, sabit-serbest ve serbest-serbest sınır şartlarında homojen olmayan çubukların doğal frekansları için trigonometrik kapalı form (closed-form) çözümlerini incelemiştir.

Pillutla ve ark. (2018) değişken kesit ve eksenel yönde değişen Elastisite modülü ve yoğunluk gibi malzeme özelliklerine sahip çubukların serbest boyuna titreşimlerini pseudospectral yöntemi kullanarak incelemiştir.

Guo ve Yang (2011) değişken kesitli çubukların serbest titreşimini incelemiş ve önerdiği yöntem ile WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin) yöntemini kıyaslamıştır. Değişken kesitli çubuklar için WKB yönteminin daha basit olduğunu ama önerilen yöntemdeki seri çözüm yakınsama hızlarının daha yüksek olduğunu belirtmiştir.

Guo ve Yang (2015) seri çözümler ile değişken kesitli çubukların serbest ve zorlanmış titreşimlerini incelemiş, frekans denklemi ve serbest titreşimdeki mod fonksiyonunu elde etmiştir.

Yardimoglu ve Aydin (2011) trigonometrik fonksiyonların n katları şeklinde değişen kesit alana sahip çubukların serbest titreşimlerini incelemiştir. Çalışmada dönüşüm fonksiyonu kullanılarak tam analitik çözümler elde edilmiş; sabit-sabit, sabit-serbest ve serbest-serbest sınır şartları için frekans denklemleri bulunmuştur.

Li (2000) çok kademeli üniform olmayan çubukların serbest titreşimlerini incelemiştir. Tek kademeli çubukların kapalı form çözümleri ile transfer matris yöntemini kullanarak çok kademeli üniform olmayan çubuklar için tek bir frekans denklemi elde edilmiştir.

Xu ve ark. (2019) değişken kesitli ve elastik sınırlandırılmış (elastically restrained) çubuklara Fourier seri çözümünü uygulamıştır. Alan değişimi Fourier kosinüs serisi şeklinde ifade edilerek çözüm geliştirilmiştir.

Çatlaklı kirişlerin analizinde, çatlak bölgelerinde oluşan süreksizliklerin tanımlanması için kütlesiz ve boyutsuz yaylar kullanılarak modellemeler yapılmaktadır. Literatürde çatlak bölgelerinde hem yer değiştirme hem de dönme açısındaki süreksizlikleri modellemek için çatlak noktasından ayrıldığı farz edilen kirişlerin birbirlerine hem burulma hem de lineer yay ile bağlı oldukları varsayımı ile çözümler yapıldığı gibi (Chen ve ark., 2019; Chouiyakh ve ark., 2017; Kim ve ark., 2018; Loya ve ark., 2006; Sarvestan ve ark., 2017), sadece dönme açısındaki süreksizliğin olacağı varsayımı ile de analizler gerçekleştirilmiştir (Khaji ve ark., 2009; Lin, 2004).

Loya ve ark. (2006) basit mesnetli çatlaklı Timoshenko kirişlerin doğal frekanslarını doğrudan diferansiyel denklemlerin çözümü ve pertürbasyonlar teorisini kullanarak elde etmiş ve sonuçları karşılaştırmıştır. Kiriş iki parça ve aralarında hem lineer hem de burulma yayı varmış gibi modellenmiş olup kompatibilite şartları eğilmeden dolayı oluşan açı ile yanal yer değiştirmelerdeki süreksizlikleri içermektedir. Küçük çatlak derinliklerinde iki yöntem yakın sonuçlar verse de pertürbasyon teorisi ile elde edilen sonuçların daha sade ifadelerden oluştuğu için çözüm kolaylığı sağladığı belirtilmiştir.

Loya ve ark. (2022) Winkler zemini üzerindeki çatlaklı Timoshenko kirişlerin serbest titreşim analizini incelemiştir. Kiriş çatlak bölgesinden ayrılmış iki kiriş gibi düşünülmüş ve birbirlerine dönme ve ötelenme yayları ile bağlı olduğu şeklinde modellenmiş olup daha önce yapılan daha basit çatlak modelleri kullanan çalışmalar ile sonuçlar karşılaştırılmıştır. Çatlağı sadece burulma yayı kullanarak modelleyen analizlerde kiriş katılığı daha yüksek olmakta ve iki model sonuçları arasındaki farklar çatlak derinliği ve mod sayısının artması ile artmaktadır. Çatlak tespitlerinde kullanılmak üzere, elastik zemin üzerindeki dikdörtgen kesitli kirişlerin yüksek doğal frekanslarının daha hassas tespiti için kesme etkisinin de göz önünde bulundurulması gerektiği belirtilmiştir. De Rosa ve Lippiello (2021) esnek sınır şartlarına sahip elastik zemin üzerindeki çatlaklı ve çatlaksız kirişlerin titreşimlerini incelemiştir. Çatlak sadece burulma yayı varmış gibi

modellenmiştir. Çalışmada Timoshenko ve Euler-Bernoulli kiriş teorileri arasında bir ilişki kurulması önerilmiştir. Yardımcı fonksiyon kullanarak, Winkler zemini üzerindeki Timoshenko kirişler için denklemler Pasternak zeminindeki Euler-Bernoulli kiriş modeli cinsinden elde edilmiştir.

Aydın (2007) eksenel yüklemeli keyfi sayıda çatlaklı Timoshenko kirişlerin titreşim frekans ve mod şekillerinin bulunması için bir analitik yaklaşım sunmuştur. Yapılan çalışmada çatlak modelinde kütlesiz burulma yayı kullanılmış olup klasik sınır şartlarının yanında noktasal kütleli deforme olabilir sınır şartları da incelenmiştir.

Shafiei ve Khaji (2011) keyfi sayıda çatlak bulunduran ve sabit hıza sahip hareketli noktasal yükleme ile uyarılan kirişin zorlanmış titreşimini analitik olarak incelemiştir. Timoshenko kiriş teorisi kullanılmış ve çatlak için sadece burulma yayı ile modelleme yapılmıştır. Çatlak parametrelerinin ve hareketli yükün etkisi incelenmiştir.

Khaji ve ark. (2009) çatlak tespitinde (çatlak pozisyonu ve derinliği) kullanılmak üzere bir analitik yaklaşım geliştirmiştir. Altı farklı sınır şartı için incelemeler yapılmış olup, doğal frekansların bulunması için geliştirilen yöntemin sonuçları ile sonlu elemanlar sonuçları kıyaslanmış ve uyumlu olduğu gösterilmiştir. Önerilen tersine çözüm yönteminde ise doğal frekanslar bilindiği takdirde çatlak bilgilerinin ufak hatalar ile tahmin edilebileceği ve önerilen yöntem ile çatlak yerini, çatlak derinliğine göre daha az hata ile tahmin edildiği gösterilmiştir.

Ghannadiasl ve Khodapanah Ajirlou (2022) çok çatlaklı Timoshenko kirişlerin dinamik cevabını araştırmıştır. Green fonksiyonu yöntemi hesaplarda kullanılmış olup çatlak parametrelerinin etkisi incelenmiştir.

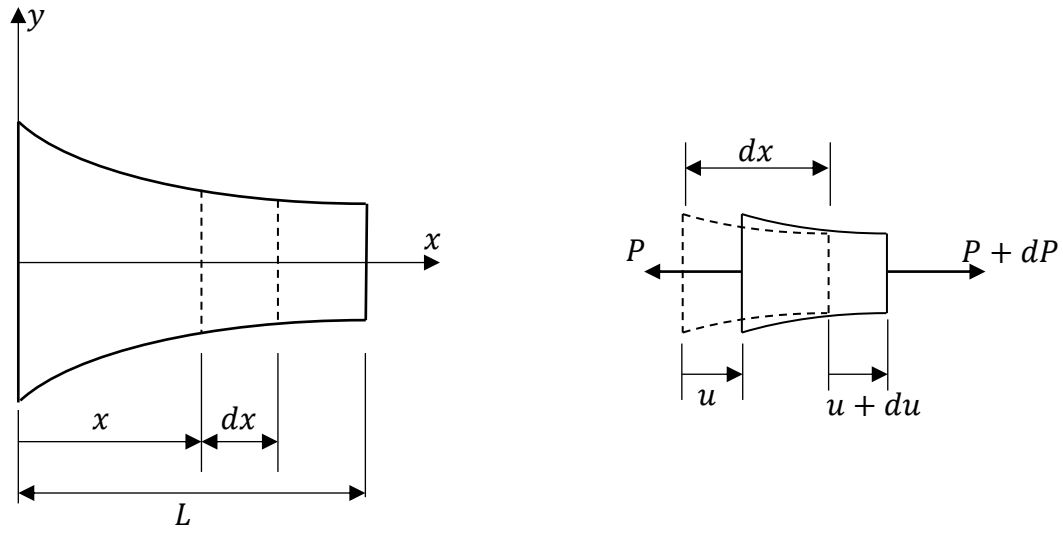
Timoshenko kirişlerin sönümlü titreşimleri üzerine de çalışmalar yapılmıştır. Sorrentino ve ark. (2007) genelleştirilmiş viskoz sönüm dağılımına sahip sürekli sistemlerin titreşim analizi için analitik bir yöntem geliştirmiş ve Timoshenko kirişlere uygulamıştır.

Zietsman ve ark. (2004) sönüm mesnetinin, serbest ucunda katı cisim bulunan konsol Timoshenko kirişlerine etkisini ele almıştır.

Değişken kesitli kirişlerin titreşimi her zaman üzerine çalışılan konulardan olmakla birlikte son yıllarda değişken kesitli Timoshenko kirişlerin titreşimi üzerine çalışmalar devam etmektedir. Yuan ve ark. (2016) homojen olmayan ve değişken kesitli Timoshenko kirişlerin serbest titreşimi için yeni bir yöntem geliştirmiştir. Kesme kuvveti ile eğilme açısı arasında bir ilişki tanımlayarak birbirine bağımlı değişken katsayılı iki diferansiyel denklemi, Sturm–Liouville tipi birbirinden bağımsız iki farklı ikinci mertebeden diferansiyel denklem şeklinde ifade etmiş ve bazı uygulamalarını göstermiştir.

2.2. Çubukların Boyuna Titreşimi

Birim uzunluk başına etkiyen dış kuvvet $\left(f(x,t)\right)$ etkisi altında, L uzunluğunda ve değişken kesitli $\left(A(x)\right)$ boyuna titreşen bir çubuktan seçilen sonsuz küçük eleman üzerine etkiyen kuvvetler Şekil 2.1'de gösterilmiştir.



Şekil 2.1. Boyuna titreşen çubuk üzerinden seçilen sonsuz küçük eleman

σ eksenel gerilme, u eksenel yer değiştirme, E elastisite modülü, ρ yoğunluk ve ε birim şekil değiştirme olmak üzere, x ekseni doğrultusunda hareket denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\sum F_x = ma \rightarrow (P + dP) - P + f dx = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.1}$$

Gerekli sadeleştirmeler yapılarak

$$dP + f dx = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.2}$$

ve

$$\frac{\partial P}{\partial x} + f = \rho A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.3}$$

olarak yazılabilir. Çubuk içerisinde oluşacak olan eksenel kuvvet (P) gerilme cinsinden $P = \sigma A(x)$ şeklinde ifade edilir. Bu denklemde, Hooke kanunu kullanılarak $\sigma = E\varepsilon$ ve $\varepsilon = \partial u / \partial x$ ifadeleri yerlerine yazılır ise

$$P = EA(x) \frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.4}$$

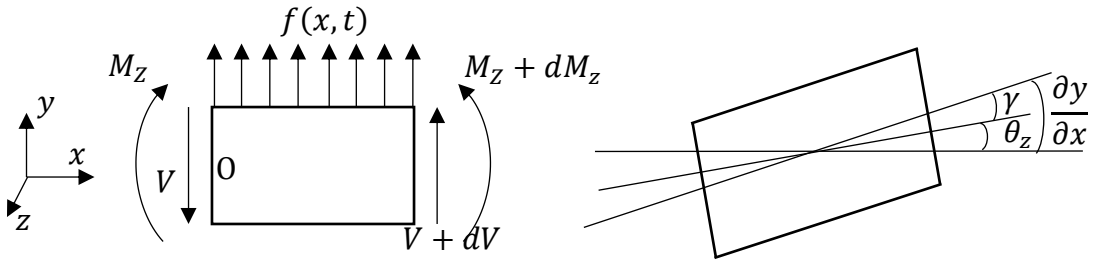
denklemi elde edilir. Elde edilen bu ifade denklem (2.3)'te yerine yazılır ise

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[EA(x) \frac{\partial u}{\partial x}\right] + f = \rho A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.5}$$

şeklinde çubukların boyuna titreşimi için genel ifadesi bulunur.

2.3. Timoshenko Kiriş Teorisi

Bir kiriş üzerinden alınan sonsuz küçük bir eleman üzerine etkiyen iç kuvvetler Şekil 2.2'de gösterildiği gibidir. Burada; $V(x,t)$ kesme kuvveti, $M(x,t)$ eğilme momenti, $f(x,t)$ kiriş üzerine etkiyen yayılı dış kuvvettir.



Şekil 2.2. Timoshenko kiriş diferansiyel elemanı.

Sonsuz küçük eleman üzerine etkiyen kuvvet ve momentler serbest cisim diyagramında gösterilmiş olup, bu elemanlar için y doğrultusundaki kuvvet ve z ekseni etrafındaki hareketin moment denklemleri aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\sum F_y = ma \rightarrow (V + dV) - V + fdx = \rho A(x)dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{2.6}$$

$$dV + fdx = \rho A(x)dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{2.7}$$

$$\sum M_o = I\alpha \rightarrow (M_z + dM_z) - M_z + (V + dV)dx + fdx\frac{dx}{2} = \rho I(x)dx\frac{\partial^2 \theta_z}{\partial t^2} \tag{2.8}$$

$$dM_z + Vdx + dVdx + fdx\frac{dx}{2} = \rho I(x)dx\frac{\partial^2 \theta_z}{\partial t^2} \tag{2.9}$$

Denklem (2.7) ve (2.9)'da dV ve dM_z ifadeleri yerine

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx \quad , \quad dM_z = \frac{\partial M_z}{\partial x}dx \tag{2.10}$$

eşitliklerini yazarak

$$\frac{\partial V}{\partial x}dx + fdx = \rho A(x)dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{2.11}$$

ve

$$\frac{\partial M_z}{\partial x}dx + Vdx + \frac{\partial V}{\partial x}dxdx + fdx\frac{dx}{2} = \rho I(x)dx\frac{\partial^2 \theta_z}{\partial t^2} \tag{2.12}$$

denklemleri elde edilir. Bu eşitliklerde dx'in ikinci dereceli ifadeleri ihmal edilir ve düzenlenirse

$$\frac{\partial V}{\partial x} + f = \rho A(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial x} + V = \rho I(x)\frac{\partial^2 \theta_z}{\partial t^2} \tag{2.14}$$

olarak bulunur. G kayma modülü, E elastisite modülü ve k Timoshenko kayma katsayısı olmak üzere, eğilme momenti

$$M_z(x,t) = EI(x)\frac{\partial \theta_z(x,t)}{\partial x} \tag{2.15}$$

ve kesme kuvveti

$$\tau = kG\gamma = \frac{V}{A} \;\rightarrow\; V(x,t) = kA(x)G\gamma \tag{2.16}$$

şeklinde yazılabilir. Şekil 2.2'den de görüleceği üzere kayma açısı $\gamma = \partial y/\partial x - \theta_z$ olarak ifade edilebilmekte olup, bu ifade kesme kuvveti denkleminde yerine yazılırsa kesme kuvveti için aşağıdaki denklem elde edilir:

$$V = kA(x)G\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \theta_z\right) \tag{2.17}$$

(2.13) ve (2.14) denklemlerinde eğilme momenti ve kesme kuvveti ifadeleri yerlerine yazılırsa

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[kA(x)G\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \theta_z\right)\right] + f(x,t) = \rho A(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[EI(x)\frac{\partial \theta_z}{\partial x}\right] + kA(x)G\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \theta_z\right) = \rho I(x)\frac{\partial^2 \theta_z}{\partial t^2} \tag{2.19}$$

denklemleri elde edilir. Üniform kiriş için bu denklemler

$$kAG\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta_z}{\partial x}\right) + f(x,t) = \rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{2.20}$$

$$EI\frac{\partial^2 \theta_z}{\partial x^2} + kAG\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \theta_z\right) = \rho I\frac{\partial^2 \theta_z}{\partial t^2} \tag{2.21}$$

şeklinde yazılabilirler. Elde edilen bu iki denklemi tanımlanan sınır şartları için beraber çözerek $y(x,t)$ ve $\theta_z(x,t)$ ifadeleri elde edilebilinir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Değişken Kesitli Çubukların Boyuna Titreşimi

Çubukların boyuna titreşimi için genel hareket denklemi önceki bölümde denklem (2.5) şeklinde elde edilmişti. Dışarıdan bir kuvvet etkisinde olmayan değişken kesitli bir çubuk için diferansiyel denklem

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[EA(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \rho A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{3.1}$$

olarak yazılabilir. Burada $u, E, A(x), \rho$ sırasıyla; eksenel yer değiştirme, elastisite modülü, kesit alanı ve yoğunluğu ifade etmektedir. Çözüm için eksenel yer değiştirme ifadesi

$$u = \phi(x)e^{i\omega t} \tag{3.2}$$

olarak kabul edilirse, (3.1) denklemi

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \left(\frac{1}{A}\frac{dA}{dx}\right)\frac{d\phi}{dx} + \frac{\rho}{E}\,\omega^2\phi = 0 \tag{3.3}$$

olarak elde edilir. Kesit alanının ifadesine bağlı olarak, kesit alanı ve türevini içeren eşitlikteki ikinci terimin varlığı diferansiyel denklemi çözümünü bildiğimiz denklem tiplerinden farklılaştırabilmekte ve bu sebepten çözümünü zorlaştırmaktadır. Bu sorunun üstesinden gelmek için, Pala ve Ertas (2017) tarafından geliştirilen Riccati diferansiyel denklem çözümü temel alınmak istenmiş ve bunun için

$$\phi(x) = e^{\int v dx} \tag{3.4}$$

dönüşümü önerilmiştir. Bu dönüşüm ile (3.3) denkleminin Riccati diferansiyel denklem formuna indirgenmesi amaçlanmaktadır. Burada v daha sonra bulunacak bir

fonksiyondur. (3.4) ifadesini ve x'e göre türevlerini (3.3) denkleminde yazar ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$v' + \frac{A'}{A}\, v + v^2 + k_1 = 0 \tag{3.5}$$

denklemi elde edilir. Burada $k_1 = \rho\omega^2/E$ olarak tanımlanmıştır.

Denklem (3.5) görüldüğü üzere Riccati diferansiyel denklemi formatında olup, bu tip denklemlerin analitik olarak çözümü için bazı yöntemler mevcut olsa da Pala ve Ertas (2017) tarafından geliştirilen ve daha genel bir çözüm elde etmek için önerilen yöntem bu bölümde (3.5) denkleminin çözümü için kullanılacaktır. Belirtilen çalışmada

$$v' + \left[\frac{2f'}{f} + \frac{g'}{g}\right] v + gv^2 + \frac{f''}{fg} = s(x) \tag{3.6}$$

şeklindeki denklemler için bir dönüşüm denklemi önerilmiş (EK 1) ve bu dönüşüm denklemi kullanılarak

$$\overline{y}'' - gs\overline{y} = 0 \tag{3.7}$$

denklemine dönüştürülmüş olur. Bu denklem, çözülmek istenen Riccati diferansiyel denkleminin önerilen yöntem ile çözülüp çözülemeyeceği hakkında fikir vermekle birlikte, bu denklemin çözümü ve devamında ters dönüşüm yapılarak

$$v(x) = \frac{1}{g(x)} \frac{d}{dx}\left[\ln \frac{\overline{y}}{f}\right] \tag{3.8}$$

olarak, (3.6) denklemi için bulunmak istenen sonuç elde edilir. (3.5) ve (3.6) denklemlerine bakılır ise aşağıdaki eşitliklerin sağlanması ile bu iki denklemin birbirinin aynısı olduğu görülmektedir.

$$\frac{2f'}{f} + \frac{g'}{g} = \frac{A'}{A} \tag{3.9}$$

$$g = 1 \tag{3.10}$$

$$\frac{f''}{fg} - s = k_1 \tag{3.11}$$

(3.10) denklemi (3.9) denkleminde yerine yazılır ve çözülürse

$$f(x) = c\sqrt{A(x)} \tag{3.12}$$

olarak bulunabilir. Burada c sabit bir sayıdır. Bulunan $f(x)$ ve ikinci türevini denklem (3.11)'de yerlerine yazarak $s(x)$

$$s(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{A''}{A} - \frac{1}{2}\left(\frac{A'}{A}\right)^2\right] - k_1 \tag{3.13}$$

şeklinde elde edilir. Elde edilen bu ifade (3.7) denkleminde yazılırsa

$$\overline{y}'' - \left(\frac{1}{2}\left[\frac{A''}{A} - \frac{1}{2}\left(\frac{A'}{A}\right)^2\right] - k_1\right)\overline{y} = 0 \tag{3.14}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümünden elde edilen $\overline{y}$ ile f ifadeleri, (3.8) denkleminde yazılarak çözülür ise $v(x)$ elde edilir. Elde edilen $v(x)$, denklem (3.4)'te tanımlanan dönüşüm denkleminde yerine yazılır ise

$$\phi(x) = \frac{\overline{y}}{f} \tag{3.15}$$

olarak ve dolayısıyla eksenel yer değiştirme de

$$u(x,t) = \frac{\overline{y}}{f} e^{i\omega t} \tag{3.16}$$

şeklinde bulunmuş olur.

3.1.1. Sabit kesitli bir çubuğun boyuna titreşimi

Önceki bölümde literatürdeki daha önce geliştirilen Riccati diferansiyel denklem çözümüne dayanarak değişken kesitli bir çubuğun titreşim analizi için gerekli denklem çıkarımları gerçekleştirilmişti. Yöntemin doğruluğunun ve kullanımının gösterilmesi açısından basit bir örnek olarak, sabit kesitli bir çubuğun titreşim analizi bu bölümde gösterilmek istenmiştir.

Bir ucu sabit diğer ucu serbest olacak şekilde mafsallanmış ve kesit alanı $A = A_0$ olan bir çubuğun boyuna titreşim yaptığı varsayılsın. Bu durumda (3.14) denklemi

$$\overline{y}'' + k_1 \overline{y} = 0 \tag{3.17}$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemin çözümü

$$\overline{y}(x) = A_1 \cos\sqrt{k_1}x + B_1 \sin\sqrt{k_1}x \tag{3.18}$$

olarak elde edilir ve (3.12) denklemi kullanılarak da $f(x) = c_1\sqrt{A_0}$ olarak bulunur. (3.16) denklemi kullanılarak eksenel yer değiştirme aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$u(x,t) = \frac{A_1 \cos\sqrt{k_1}x + B_1 \sin\sqrt{k_1}x}{\sqrt{A_0}} e^{i\omega t} \tag{3.19}$$

Bu çubuğun doğal frekanslarını bulmak için sınır şartları uygulanırsa; ilk sınır şartı $(u(0,t) = 0)$ $A_1 = 0$ olmasını gerektirir. Serbest uç için yazılan ikinci sınır şartı $(\partial u(L,t)/\partial x = 0)$ gereği $B_1\sqrt{k_1}\cos\sqrt{k_1}L = 0$ eşitliği sağlanmalıdır. Daha önceki bölümde $k_1 = \rho\omega^2/E$ olarak tanımlandığı hatırlatılarak çubuğun doğal frekansı

$$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\ , \qquad n = 0,1,2\ldots \tag{3.20}$$

olarak elde edilir. Bulunan bu sonuç literatürdeki (Rao, 2011) verilen sonuç ile aynıdır.

3.1.2. Kesit alanı değişimi $A(x) = \left(\sqrt{A_0} + cx\right)^2$ şeklinde olan bir çubuğun boyuna titreşimi

Bu bölümde kesit alanı $A(x) = \left(\sqrt{A_0} + cx\right)^2$ şeklinde değişen bir çubuğun boyuna titreşimi incelenmek istenmektedir. Kesit alanının bu şekilde seçilmesinin amacı denklem (3.14)'deki $A''/A\ - A'^2/2A^2$ ifadesinin sıfıra eşitlenmek istenmesidir. Bu ifadenin sıfıra eşit olması ile (3.14) denklemi aşağıdaki formunu alır:

$$\overline{y}'' + k_1\overline{y} = 0 \tag{3.21}$$

Bu denklemin çözümünden

$$\overline{y}(x) = A_2\cos\sqrt{k_1}x + B_2\sin\sqrt{k_1}x \tag{3.22}$$

elde edilir. (3.12) denkleminde $f(x) = c\sqrt{A(x)}$ olarak belirtilmişti. Bu denklem kullanılarak

$$f = c_1\left(\sqrt{A_0} + cx\right) \tag{3.23}$$

şeklinde bulunur. Böylelikle eksenel yer değiştirme

$$u(x,t) = \frac{A_2\cos\sqrt{k_1}x + B_2\sin\sqrt{k_1}x}{\sqrt{A_0} + cx}e^{i\omega t} \tag{3.24}$$

olarak elde edilir. Bir önceki bölümde olduğu gibi çubuğun bir ucunun sabit, diğer ucunun serbest olduğu varsayılır ise sınır şartları aşağıdaki gibidir:

$$u(0,t)=0 \quad , \qquad \frac{\partial u(L,t)}{\partial x}=0 \tag{3.25}$$

İlk sınır şartı gereği $A_2=0$ olarak bulunur. İkinci sınır şartı gereği

$$\frac{\partial u(L,t)}{\partial x}=e^{i\omega t}\left\{\frac{\left(B_2\sqrt{k_1}\cos\sqrt{k_1}L\right)\left(\sqrt{A_0}+cL\right)-B_2c\sin\sqrt{k_1}L}{\left(\sqrt{A_0}+cL\right)^2}\right\}=0 \tag{3.26}$$

ve

$$B_2\sqrt{k_1}\cos\sqrt{k_1}L\left(\sqrt{A_0}+cL\right)-B_2c\sin\sqrt{k_1}L=0 \tag{3.27}$$

bulunur. Gerekli sadeleştirmeler yapılır ve $k_1=\rho\omega^2/E$ olduğu da göz önünde bulundurulursa, çubuğun bu sınır şartları altındaki doğal frekans denklemi

$$\omega_n=\sqrt{\frac{E}{\rho}}\frac{1}{L}\arctan\left[\frac{\omega_n\sqrt{\frac{\rho}{E}}\left(\sqrt{A_0}+cL\right)}{c}\right] \tag{3.28}$$

şeklinde elde edilir.

3.1.3. Kesit alanı değişimi $A(x)=A_0e^{-k_0x}$ şeklinde olan bir çubuğun boyuna titreşimi

k_0 sabit bir değer olmak üzere, kesit alanı $A(x)=A_0e^{-k_0x}$ şeklinde olan bir çubuk için

$$\frac{A''}{A}-\frac{A'^2}{2A^2}=\frac{k_0^2}{2} \tag{3.29}$$

olarak bulunur. Böylelikle (3.14) denklemi

$$\overline{y}'' + \left[k_1 - \frac{k_0^2}{4}\right]\overline{y} = 0 \tag{3.30}$$

şeklinde yazılabilir. İşlem takip kolaylığı sağlaması için $\overline{y}$'nin katsayısı a_1 olarak tanımlansın. Bu durumda çözülecek diferansiyel denklem

$$\overline{y}'' + a_1\overline{y} = 0 \tag{3.31}$$

olur. Burada $a_1 = k_1 - k_0^2/4$ olarak tanımlanmıştı. Diferansiyel denklemin çözümünden

$$\overline{y}(x) = \overline{A}_3 \cos\sqrt{a_1}x + \overline{B}_3 \sin\sqrt{a_1}x \tag{3.32}$$

olarak bulunur. (3.12) denklemi kullanılarak $f(x)$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$f(x) = c\sqrt{A_0}e^{-\frac{k_0 x}{2}} \tag{3.33}$$

(3.16) denkleminde bu ifadeler yerlerine yazılırsa eksenel yer değiştirme ifadesi

$$u(x,t) = \frac{(A_3 \cos\sqrt{a_1}x + B_3 \sin\sqrt{a_1}x)}{e^{-\frac{k_0 x}{2}}} e^{i\omega t} \tag{3.34}$$

olarak bulunmuş olur. Burada $A_3 = \overline{A}_3/c\sqrt{A_0}$ ve $B_3 = \overline{B}_3/c\sqrt{A_0}$ şeklinde tanımlanmışlardır. Sınır şartları önceki bölümlerde olduğu gibi bir ucu sabit diğer ucu serbest olduğu durumda $A_3 = 0$ ve

$$\sqrt{a_1}\cos\sqrt{a_1}L + \frac{k_0}{2}\sin\sqrt{a_1}L = 0 \tag{3.35}$$

olarak bulunur. Bulunan bu denklem çubuk için frekans denklemi olup, $\beta_1 = \sqrt{a_1}L$ ve $\zeta_1 = k_0 L$ tanımlamaları ile

$$\beta_1 + \frac{\zeta_1}{2}\tan\beta_1 = 0 \tag{3.36}$$

şeklinde düzenlenmiş olarak yazılabilir.

3.1.4. Kesit alanı değişimi $A(x) = A_0 \sinh^2(px + r)$ şeklinde olan bir çubuğun boyuna titreşimi

Kesit alanı değişimi $A(x) = A_0 \sinh^2(px + r)$ olan bir çubuk için

$$\frac{A''}{A} - \frac{A'^2}{2A^2} = 2p^2 \tag{3.37}$$

olarak bulunur. Burada p ve r sabit sayılardır. Bu ifade (3.14) denkleminde yerine yazılır ise

$$\overline{y}'' + (k_1 - p^2)\overline{y} = 0 \tag{3.38}$$

şeklinde bulunur. Bulunan bu diferansiyel denklemin çözümünden

$$\overline{y}(x) = \overline{A}_4 \cos\sqrt{a_2}x + \overline{B}_4 \sin\sqrt{a_2}x \tag{3.39}$$

elde edilir. Burada $a_2 = k_1 - p^2$ olup bu değerin pozitif olduğu varsayılmıştır. (3.12) denkleminden faydalanılarak $f(x) = c\sqrt{A_0}\sinh(px + r)$ olarak elde edilir. Bulunan $\overline{y}(x)$ ve $f(x)$ ifadeleri (3.16) denkleminde yerlerine yazılarak

$$u(x,t) = \frac{(A_4 \cos\sqrt{a_2}x + B_4 \sin\sqrt{a_2}x)}{\sinh(px + r)} e^{i\omega t} \tag{3.40}$$

şeklinde bulunur. Burada $A_4 = \overline{A}_4/c\sqrt{A_0}$ ve $B_4 = \overline{B}_4/c\sqrt{A_0}$ olarak tanımlanmıştır. Önceki bölümlerde kullanılan aynı sınır şartları altında $A_4 = 0$ ve

$$\sqrt{a_2}\cos\sqrt{a_2}L\sinh(pL+r)-p\sin\sqrt{a_2}L\cosh(pL+r)=0 \tag{3.41}$$

olarak bulunur. $\beta_2=\sqrt{a_2}L$ ve $\zeta_2=pL$ tanımlamaları yapılırsa frekans denklemi

$$\tan(\beta_2)=\frac{\beta_2\tanh(\zeta_2+r)}{\zeta_2} \tag{3.42}$$

şeklinde elde edilir.

3.1.5. Kesit alanı değişimi $A(x)=A_0\sin^2(px+r)$ şeklinde olan bir çubuğun boyuna titreşimi

Bir önceki bölümde hiperbolik fonksiyon cinsinden tanımlanabilen kesite sahip bir çubuk için inceleme yapılmıştı. Bu bölümde ise kesit alanı $A(x)=A_0\sin^2(px+r)$ şeklinde değişen bir çubuğun analizi gerçekleştirilecektir. Bu ifade kullanılarak

$$\frac{A''}{A}-\frac{A'^2}{2A^2}=-2p^2 \tag{3.43}$$

olarak bulunur. Elde edilen bu ifade (3.14) denkleminde yerine yazılarak

$$\overline{y}''+(p^2+k_1)\overline{y}=0 \tag{3.44}$$

ve bu denklemin çözümü $a_3=p^2+k_1$ tanımlaması yapılarak

$$\overline{y}(x)=\overline{A}_5\cos\sqrt{a_3}x+\overline{B}_5\sin\sqrt{a_3}x \tag{3.45}$$

şeklinde elde edilir. Denklem (3.12) kullanılarak

$$f(x)=c\sqrt{A_0}\sin(px+r) \tag{3.46}$$

olarak bulunur ve elde edilen $\overline{y}(x)$ ve $f(x)$ ifadeleri denklem (3.16)'da yazılırsa

$$u(x,t) = \frac{\overline{A}_5 \cos\sqrt{a_3}x + \overline{B}_5 \sin\sqrt{a_3}x}{c\sqrt{A_0}\sin(px+r)} e^{i\omega t} \tag{3.47}$$

elde edilir. $A_5 = \overline{A}_5/c\sqrt{A_0}$ ve $B_5 = \overline{B}_5/c\sqrt{A_0}$ olarak tanımlanırsa eksenel yer değiştirme

$$u(x,t) = \frac{A_5 \cos\sqrt{a_3}x + B_5 \sin\sqrt{a_3}x}{\sin(px+r)} e^{i\omega t} \tag{3.48}$$

şeklinde bulunur. Bir ucu sabit diğer ucu serbest çubuk için sınır şartları uygulanırsa $A_5 = 0$ ve $\sqrt{a_3}\cos\sqrt{a_3}L\ \sin(pL+r) - p\sin\sqrt{a_3}L\cos(pL+r) = 0$ olarak bulunur. $\beta_3 = \sqrt{a_3}L$ ve $\zeta_3 = pL$ tanımları ile frekans denklemi

$$\tan\beta_3 = \frac{\beta_3 \tan(\zeta_3 + r)}{\zeta_3} \tag{3.49}$$

olarak elde edilir.

3.1.6. Kesit alanı değişimi $A(x) = A_0(1-x)^{-2}$ şeklinde olan bir çubuğun boyuna titreşimi

$x \neq 1$ olmak üzere alan değişimi $A(x) = A_0(1-x)^{-2}$ olan bir çubuğun eksenel yer değiştirmesinin bulunması istenilmiş olsun. Bu durumda (3.12) ve (3.14) denklemleri

$$f = \frac{c\sqrt{A_0}}{1-x} \tag{3.50}$$

ve

$$\overline{y}'' + \left(k_1 - \frac{2}{(1-x)^2}\right)\overline{y} = 0 \tag{3.51}$$

şeklinde yazılabilirler. Elde edilen bu diferansiyel denklem çözümünün sonucunda

$$\overline{y}(x) = \frac{\sqrt{k_1 x^2 - 2k_1 x + k_1 + 1}}{x - 1}\left(\overline{A}_6 e^{-\kappa} + \overline{B}_6 e^{\kappa}\right) \tag{3.52}$$

olarak bulunur. Burada takip kolaylığı için

$$\kappa = \sqrt{-k_1}\left(x - \frac{\arctan\left(\sqrt{k_1}x - \sqrt{k_1}\right)}{\sqrt{k_1}}\right) \tag{3.53}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Elde edilen $f(x)$ ve $\overline{y}(x)$ ifadeleri (3.16) denkleminde yerlerine yazılırsa eksenel yer değiştirme

$$u(x,t) = \sqrt{k_1 x^2 - 2k_1 x + k_1 + 1}\,(A_6 e^{-\kappa} + B_6 e^{\kappa}) e^{i\omega t} \tag{3.54}$$

olarak elde edilir. Burada $A_6 = -\overline{A}_6/c\sqrt{A_0}$ ve $B_6 = -\overline{B}_6/c\sqrt{A_0}$ olarak tanımlanmıştır.

3.1.7. $A''/A - A'^2/(2A^2)$ ifadesinin sabit bir sayıya eşit olduğu durum

Bundan önceki bölümlerde çubuk kesitinin eksen boyunca değişiminin bilindiği bazı durumlar için çözümler gerçekleştirildi. Bu bölümde ise kesit değişimini doğrudan vermektense (3.14) denkleminin çözümünü bulabileceğimiz durumları düşünüp

$$\frac{A''}{A} - \frac{A'^2}{2A^2} = k \tag{3.55}$$

olduğu durumun incelenmesi istenilmiştir. Burada k keyfi bir sabit sayıdır. Bu denklemin çözümü için (3.55) denklemini biraz düzenleyerek

$$\frac{A''}{A} - \frac{A'^2}{A^2} + \frac{1}{2}\frac{A'^2}{A^2} = k \tag{3.56}$$

şeklinde yazmak mümkündür. Eşitliğin sol tarafındaki ilk iki terim (A'/A) nın x'e göre türevi olduğu görülmektedir. Bu durumda $\vartheta = (A'/A)$ tanımlaması yapılırsa (3.56) denklemi

$$\frac{d\vartheta}{dx} + \frac{1}{2}\vartheta^2 = k \tag{3.57}$$

şeklinde yazılabilir. Elde edilen bu denklem Riccati diferansiyel denklemi olup çözümü

$$\vartheta = \sqrt{2k}\frac{\left(e^{\sqrt{2k}x} - e^{2\sqrt{2k}c_1}\right)}{\left(e^{2\sqrt{2k}c_1} + e^{\sqrt{2k}x}\right)} \tag{3.58}$$

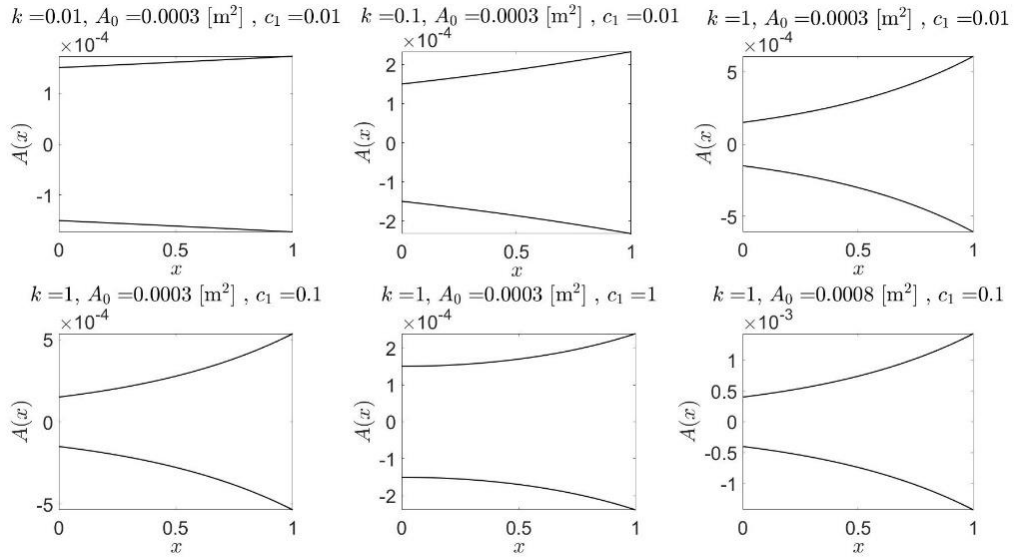
olarak elde edilir. $\vartheta = A'/A$ tanımlaması daha önce yapılmıştı. Buna göre

$$\frac{A'}{A} = \sqrt{2k}\frac{\left(e^{\sqrt{2k}x} - e^{2\sqrt{2k}c_1}\right)}{\left(e^{2\sqrt{2k}c_1} + e^{\sqrt{2k}x}\right)} \tag{3.59}$$

olup bu diferansiyel denklemin çözümünden de $A(x)$ aşağıdaki belirtildiği şekilde elde edilmiş olunur:

$$A(x) = c_2\left(e^{\sqrt{2k}x} + c_1\right)^2 e^{-\sqrt{2k}x} \tag{3.60}$$

Elde edilen kesit alanı ifadesinin c_1, c_2 ve k'ya bağlı olduğu görülebileceği gibi, buna bağlı olarak da bu ifadelerin farklı değerleri için farklı kesit şekillerinin elde edilebileceği görülmektedir. c_1'in seçilmesi ile $x = 0$'daki kesit alanı $A(0)$'ın bilinmesi durumunda c_2 elde edilebilmekte olup, örnek oluşturması için bu ifadelerin farklı değerleri için bazı kesit değişimleri Şekil 3.1'de gösterilmiştir.



Şekil 3.1. Farklı k, A_0 ve c_1 için kesit alanı değişimleri.

(3.60) denkleminde belirtilen kesit değişimine sahip çubukların boyuna titreşim problemi incelenecek olursa (3.14) denklemi

$$\overline{y}'' - \left(\frac{k}{2} - k_1\right)\overline{y} = 0 \tag{3.61}$$

olarak yazılır. Bu denklemin çözümünden de

$$\overline{y}(x) = A_7 \cos\sqrt{a_4}x + B_7 \sin\sqrt{a_4}x \tag{3.62}$$

şeklinde elde edilir. Burada $a_4 = k_1 - k/2$ tanımlaması yapılmıştır. (3.12) denkleminden $f = \sqrt{c_2\left(e^{\sqrt{2k}x} + c_1\right)^2 e^{-\sqrt{2k}x}}$ olarak bulunur ve (3.62) denkleminde elde edilen $\overline{y}$ ile birlikte (3.16) denkleminde yazılarak

$$u(x,t) = \frac{A_7 \cos\sqrt{a_4}x + B_7 \sin\sqrt{a_4}x}{\sqrt{c_2}\left(e^{\sqrt{2k}x} + c_1\right)e^{-\sqrt{k/2}x}}\, e^{i\omega t} \tag{3.63}$$

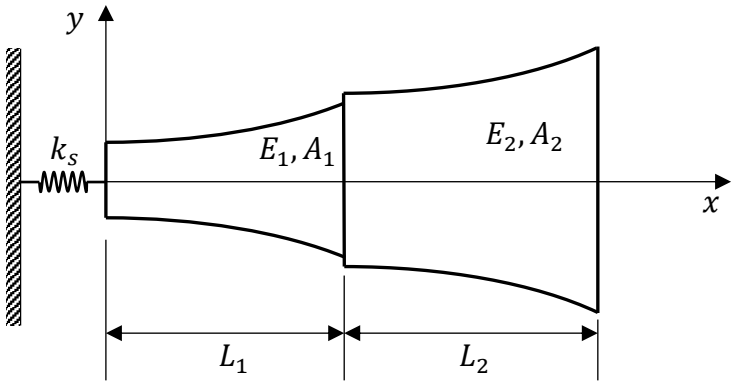
elde edilir. $x = 0$ noktasından sabit diğer ucu serbest bir çubuk düşünülürse sabit uçtaki yazılan sınır şartından $A_7 = 0$ bulunurken, serbest uç için yazılan şarttan

$$\sqrt{a_4}\cos\sqrt{a_4}L\left(e^{\sqrt{2k}L}+c_1\right)e^{-\sqrt{k/2}L}\Big)$$
$$-\sin\sqrt{a_4}L\left(\left(\sqrt{2k}e^{\sqrt{2k}L-\sqrt{k/2}L}\right)-\sqrt{k/2}\,e^{-\sqrt{k/2}L}\left(e^{\sqrt{2k}L}+c_1\right)\right) \quad (3.64)$$
$$=0$$

elde edilir.

3.1.8. Değişken kesitli kademeli bir çubuğun frekans analizi

Önceki kısımlarda bazı kesit tipleri belirtilen değişken kesitli çubukların analizi gerçekleştirilmişti. Bu analiz için önerilen yöntem çubukların kademeli olması durumunda da kullanılabilmektedir. Örnek olması açısından Şekil 3.2'de görülen çift kademeli çubuk bu bölümde ele alınmıştır.



Şekil 3.2. Çift kademeli değişken kesitli çubuk.

Kesit değişiminin her kademe için bölüm 3.1.2' de incelen kesit değişimine benzer olarak $A_1(x)=\left(\sqrt{A_0}+c_1x\right)^2$ ve $A_2(x)=\left(\sqrt{A_0}+c_2x\right)^2$ olduğu varsayılmıştır. Çubuğun sol ucu lineer yay ile duvara bağlı iken sağ ucunun serbest olduğu düşünülmüştür. Her bir kademe için hareket denklemleri yazılırsa

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[E_1 A_1(x)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right] = \rho_1 A_1(x)\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2},\ \ 0 < x < L_1 \tag{3.65}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[E_2 A_2(x)\frac{\partial u_2}{\partial x}\right] = \rho_2 A_2(x)\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2},\ \ L_1 < x < L_1 + L_2 \tag{3.66}$$

şeklinde elde edilir. Çubuğun ilk kısmının boyu L_1, ikinci kısmının uzunluğu ise L_2'dir. Bu denklemlerde $A_1(x)$ ve $A_2(x)$ sırasıyla çubuğun $0 - L_1$ ve $L_1 - (L_1 + L_2)$ arasındaki parçalarının kesit alan değişimlerini göstermekte olup yine ρ_1, E_1 ve ρ_2, E_2 de benzer olarak yoğunluklarını ve Elastisite modüllerini göstermektedir. Çubuğun sınır ve süreklilik şartları için yazılan eşitlikler aşağıdaki gibidir:

$$E_1 A_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}(0,t) = k_s u_1(0,t)\ \ , \qquad x = 0 \tag{3.67}$$

$$E_1 A_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}(L_1,t) = E_2 A_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}(L_1,t)\ \ , \qquad x = L_1 \tag{3.68}$$

$$u_1(L_1,t) = u_2(L_1,t)\ , \qquad x = L_1 \tag{3.69}$$

$$E_2 A_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}(L_1 + L_2,t) = 0\ \ , \qquad x = L_1 + L_2 \tag{3.70}$$

Kesit alan değişimi $A(x) = \left(\sqrt{A_0} + cx\right)^2$ olan kirişler için çözüm bölüm 3.1.2'de yapılmıştı. Bu çözüm sonuçlarına göre çubuğun tamamının aynı malzemeden olduğu kabul edilerek çubuğun her bir kısmı için eksenel yer değiştirme ifadelerini

$$u_1(x,t) = \frac{A_8 \cos\sqrt{k_1}x + B_8 \sin\sqrt{k_1}x}{\sqrt{A_0} + c_1 x} e^{i\omega t},\ \ 0 < x < L_1 \tag{3.71}$$

$$u_2(x,t) = \frac{A_9 \cos\sqrt{k_1}x + B_9 \sin\sqrt{k_1}x}{\sqrt{A_0} + c_2 x} e^{i\omega t},\ \ L_1 < x < L_1 + L_2 \tag{3.72}$$

şeklinde elde etmek mümkündür. (3.71) ve (3.72) denklemleri (3.67)-(3.70) denklemlerinde kullanılırsa

$$\begin{bmatrix} z_1 & -1 & 0 & 0 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ 0 & 0 & p_1 & p_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_8 \\ B_8 \\ A_9 \\ B_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.73}$$

matris formunda elde edilir. Burada ara işlemlerden sonra boyutsuz ifadeler

$$\zeta_4 = \frac{L_2}{L_1}, \qquad g_1 = \frac{\sqrt{A_0}}{L_1}, \;\; \Omega = \sqrt{k_1} L_1, \;\; z_1 = \frac{1}{\Omega}\left(\frac{k_s L_1}{A_1(0)E} + \frac{c_1}{g_1}\right) \;\; ,$$

$$r_1 = \frac{\cos\Omega}{g_1 + c_1} \;\; , \;\; r_2 = \frac{\sin\Omega}{g_1 + c_1}, \;\; r_3 = -\frac{\cos\Omega}{g_1 + c_2} \;\; , \;\; r_4 = -\frac{\sin\Omega}{g_1 + c_2}$$

$$p_1 = \Omega \sin\big(\Omega(1+\zeta_4)\big)\left(g_1 + c_2(1+\zeta_4)\right) + c_2 \cos(\Omega(1+\zeta_4))$$

$$p_2 = -\Omega \cos\big(\Omega(1+\zeta_4)\big)\left(g_1 + c_2(1+\zeta_4)\right) + c_2 \sin\big(\Omega(1+\zeta_4)\big) \tag{3.74}$$

$$s_1 = -\Omega \sin(\Omega)\,(g_1 + c_1) - c_1 \cos(\Omega)$$

$$s_2 = \Omega \cos(\Omega)\,(g_1 + c_1) - c_1 \sin(\Omega)$$

$$s_3 = \Omega \sin(\Omega)\,(g_1 + c_2) + c_2 \cos(\Omega)$$

$$s_4 = -\Omega \cos(\Omega)\,(g_1 + c_2) + c_2 \sin(\Omega)$$

olarak tanımlanmışlardır. (3.73) denklemi göz önüne alındığında frekans denklemi katsayılar matrisinin determinantının sıfıra eşitlenmesi ile

$$z_3[s_2(r_3p_2 - r_4p_1) - s_3r_2p_2 + s_4r_2p_1] + [s_1(r_3p_2 - r_4p_1) - s_3r_1p_2 + s_4r_1p_1] = 0 \tag{3.75}$$

formunda elde edilir. Sınır şartı olarak sol ucun doğrudan sabit alınması durumunda k_s sonsuz büyük düşünüldüğünde frekans denklemi

$$s_2(r_3p_2 - r_4p_1) - s_3r_2p_2 + s_4r_2p_1 = 0 \tag{3.76}$$

olarak bulunabilir.

3.2. Timoshenko Kiriş Teorisi İçin Çözüm

Dışarıdan etkiyen bir kuvvet etkisinde olmayan kiriş için (2.20) ve (2.21) denklemlerinin çözümünde, $y(x,t) = LY(x)e^{(i\omega t)}$ ve $\theta_z(x,t) = \Psi(x)e^{(i\omega t)}$ kabulü yapılır ve denklemler düzenlenir ise

$$kAG\left(L\frac{d^2Y}{dx^2} - \frac{d\Psi}{dx}\right) = -\rho AL\omega^2 Y \tag{3.77}$$

$$EI\frac{d^2\Psi}{dx^2} + kAG\left(L\frac{dY}{dx} - \Psi\right) = -\rho I\omega^2\Psi \tag{3.78}$$

elde edilir. (3.77) ve (3.78) denklem çözümlerinin kullanım kolaylığı sağlaması bakımından bu denklemlerin boyutsuzlaştırılması ve boyutsuz parametreler üzerinden analizi gerçekleştirilmesi için $\xi = x/L$ kabulü yapılmaktadır. Bu kabul altında düzenlenen denklemler

$$\frac{kAG}{L}(Y''(\xi) - \Psi'(\xi)) = -\rho AL\omega^2 Y(\xi) \tag{3.79}$$

$$\frac{EI}{L^2}\Psi''(\xi) + kAG\big(Y'(\xi) - \Psi(\xi)\big) = -\rho I\omega^2\Psi(\xi) \tag{3.80}$$

olarak elde edilir. Burada " $'$ " ve " $''$ " , ifadelerin ξ'ye göre türevlerini göstermektedir.

(3.79) ve (3.80) denklemlerindeki $\Psi(\xi)$ ve türevlerine bağlı ifadeleri yok ederek sadece $Y(\xi)$ ve türevlerini içeren aşağıdaki gibi tek bir denklem elde edilebilir:

$$Y^{iv}(\xi) + PY''(\xi) + QY(\xi) = 0 \tag{3.81}$$

Burada boyutsuz doğal frekans $\Omega = \omega L\sqrt{\rho/E}$ tanımlaması ile

$$P = \Omega^2\left(\frac{E}{kG} + 1\right) \quad , \qquad Q = \Omega^2\left(\frac{\Omega^2 E}{kG} - \frac{AL^2}{I}\right) \tag{3.82}$$

olarak ifade edilmiştir. (3.81) denkleminin çözümünden

$$Y(\xi) = C_1 \sin\beta_1\xi + C_2 \cos\beta_1\xi + C_3 \sinh\beta_2\xi + C_4 \cosh\beta_2\xi \tag{3.83}$$

elde edilir. Burada $\Delta = P^2 - 4Q$ olmak üzere

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{P + \sqrt{\Delta}}{2}} \quad , \qquad \beta_2 = \sqrt{\frac{-P + \sqrt{\Delta}}{2}} \tag{3.84}$$

şeklinde tanımlanmışlardır. Elde edilen $Y(\xi)$ ifadesini ve iki kere türevini (3.79) denkleminde yerine yazarak

$$\Psi'(\xi) = \overline{m}_1 C_1 \sin\beta_1\xi + \overline{m}_1 C_2 \cos\beta_1\xi + \overline{m}_2 C_3 \sinh\beta_2\xi + \overline{m}_2 C_4 \cosh\beta_2\xi \tag{3.85}$$

elde edilir. Burada $\overline{m}_1$ ve $\overline{m}_2$ aşağıdaki belirtildiği şekilde tanımlanmışlardır:

$$\overline{m}_1 = \frac{\Omega^2 E}{kG} - \beta_1^2 \quad , \quad \overline{m}_2 = \frac{\Omega^2 E}{kG} + \beta_2^2 \tag{3.86}$$

(3.85) denkleminin integrali alınarak

$$\Psi(\xi) = -m_1 C_1 \cos\beta_1\xi + m_1 C_2 \sin\beta_1\xi + m_2 C_3 \cosh\beta_2\xi + m_2 C_4 \sinh\beta_2\xi \qquad (3.87)$$

ifadesi elde edilebilir. Burada $m_1 = \overline{m}_1/\beta_1$ ve $m_2 = \overline{m}_2/\beta_2$ olarak tanımlanmışlardır. Elde edilen $Y(\xi)$ ve $\Psi(\xi)$ ifadeleri kiriş için belirtilen sınır şartları ifadelerinde kullanılarak kirişin frekans ve mod şekilleri elde edilebilir.

Kesme kuvveti ve eğilme momentinin de boyutsuz ξ değişkeni cinsinden ifadeleri aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$V(\xi, t) = kAG\overline{V}(\xi)e^{i\omega t} \qquad (3.88)$$

$$M(\xi, t) = \frac{EI}{L}\overline{M}(\xi)e^{i\omega t} \qquad (3.89)$$

Burada $\overline{V}(\xi) = \left(Y'(\xi) - \Psi(\xi)\right)$ ve $\overline{M}(\xi) = \Psi'(\xi)$ olarak ifade edilir. (3.83) ve (3.87) denklemlerinden faydalanılarak kesme kuvveti ve eğilme momenti fonksiyonları

$$\begin{aligned}\overline{V}(\xi) = {} & C_1(\beta_1 + m_1)\cos\beta_1\xi - C_2(\beta_1 + m_1)\sin\beta_1\xi + C_3(\beta_2 - m_2)\cosh\beta_2\xi \\ & + C_4(\beta_2 - m_2)\sinh\beta_2\xi\end{aligned} \qquad (3.90)$$

$$\begin{aligned}\overline{M}(\xi) = {} & C_1\beta_1 m_1 \sin\beta_1\,\xi + C_2\beta_1 m_1 \cos\beta_1\,\xi + C_3\beta_2 m_2 \sinh\beta_2\,\xi \\ & + C_4\beta_2 m_2 \cosh\beta_2\,\xi\end{aligned} \qquad (3.91)$$

olarak bulunurlar. Elde edilen yer değiştirme, dönme açısı, moment ve kesme kuvveti fonksiyonlarının ifadelerini matris formunda aşağıdaki gibi yazmak mümkündür:

$$\{\mathbf{Z}(\xi)\} = [\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\xi})]\{\mathbf{C}\} \qquad (3.92)$$

Burada $\{\mathbf{Z}(\xi)\}$ durum vektörü, $\{\mathbf{C}\}$ sabit katsayılar vektörü olup

$$\{\mathbf{Z}(\xi)\} = \begin{Bmatrix} Y(\xi) \\ \Psi(\xi) \\ \overline{M}(\xi) \\ \overline{V}(\xi) \end{Bmatrix} \quad , \quad \{\mathbf{C}\} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \tag{3.93}$$

ve

$$[\boldsymbol{B}(\xi)] = \begin{bmatrix} \sin\beta_1\xi & \cos\beta_1\xi & \sinh\beta_2\xi & \cosh\beta_2\xi \\ -m_1\cos\beta_1\xi & m_1\sin\beta_1\xi & m_2\cosh\beta_2\xi & m_2\sinh\beta_2\xi \\ \beta_1 m_1\sin\beta_1\,\xi & \beta_1 m_1\cos\beta_1\,\xi & \beta_2 m_2\sinh\beta_2\,\xi & \beta_2 m_2\cosh\beta_2\,\xi \\ (\beta_1+m_1)\cos\beta_1\xi & -(\beta_1+m_1)\sin\beta_1\xi & (\beta_2-m_2)\cosh\beta_2\xi & (\beta_2-m_2)\sinh\beta_2\xi \end{bmatrix} \tag{3.94}$$

şeklinde belirtilmiştir.

Kirişin $\xi = 0$ noktası için (3.92) denklemi

$$\{\mathbf{Z}(0)\} = [\boldsymbol{B}(0)]\{\mathbf{C}\} \tag{3.95}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemden $\{\mathbf{C}\}$ sabit katsayılar vektörü aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\{\mathbf{C}\} = [\boldsymbol{B}(0)]^{-\mathbf{1}}\{\mathbf{Z}(0)\} \tag{3.96}$$

Benzer olarak kirişin $\xi = 1$ noktası için

$$\{\mathbf{Z}(1)\} = [\boldsymbol{B}(1)]\{\mathbf{C}\} \tag{3.97}$$

yazılabilir ve bu denklemde $\{\mathbf{C}\}$ yerine (3.96) denkleminde elde edilen ifade yazılırsa

$$\{\mathbf{Z}(1)\} = [\boldsymbol{B}(1)][\boldsymbol{B}(0)]^{-\mathbf{1}}\{\mathbf{Z}(0)\} \tag{3.98}$$

şeklinde kirişin sınır şartlarına bağlı olarak elde edilir.

3.2.1. Timoshenko kirişleri için diklik (orthogonality) şartları

(3.79) ve (3.80) denklemleri kesme kuvveti ve eğilme momenti fonksiyonları cinsinden

$$kAG\overline{V}'(\xi) = -AE\Omega^2 Y(\xi) \tag{3.99}$$

$$\frac{EI}{L^2}\overline{M}'(\xi) + kAG\overline{V}(\xi) = -\frac{EI}{L^2}\Omega^2\Psi(\xi) \tag{3.100}$$

formunda yazılabilmektedir. Timoshenko kirişlerin diklik (orthogonality) şartlarının bulunabilmesi için (3.99) ve (3.100) denklemleri n. mod için aşağıdaki gibi yazılır:

$$kAG\overline{V}_n' = -AE\Omega_n^2 Y_n \tag{3.101}$$

$$\frac{EI}{L^2}\overline{M}_n' + kAG\overline{V}_n = -\frac{EI}{L^2}\Omega_n^2\Psi_n \tag{3.102}$$

Y_m ve Ψ_m m. mod için ifadeleri göstermekte olup, (3.101) denklemini Y_m, (3.102) denklemini de Ψ_m ile çarpıp 0-1 aralığında integrali alınır ve taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(kAG\overline{V}_n' Y_m + \frac{EI}{L^2}\overline{M}_n'\Psi_m + kAG\overline{V}_n\Psi_m\right) d\xi \\ = -\Omega_n^2 \int_0^1 \left(AEY_nY_m + \frac{EI}{L^2}\Psi_n\Psi_m\right) d\xi\end{aligned} \tag{3.103}$$

eşitliği elde edilir. Aynı işlemler önce ana denklemlerin m. mod için yazılıp n. mod ifadeleri ile genişletilmesi sonucunda

$$\int_0^1 \left(kAG\overline{V}_m' Y_n + \frac{EI}{L^2}\overline{M}_m' \Psi_n + kAG\overline{V}_m \Psi_n \right) d\xi = -\Omega_m^2 \int_0^1 \left(AEY_m Y_n + \frac{EI}{L^2}\Psi_m \Psi_n \right) d\xi \tag{3.104}$$

şeklinde yazılabilir. Bu iki denklem birbirinden çıkartılır ve düzenlenerek aşağıdaki formda elde edilir:

$$(\Omega_n^2 - \Omega_m^2) \int_0^1 \left(AEY_n Y_m + \frac{EI}{L^2}\Psi_n \Psi_m \right) d\xi = \int_0^1 \left(kAG\left(\overline{V}_m' Y_n - \overline{V}_n' Y_m + \overline{V}_m \Psi_n - \overline{V}_n \Psi_m \right) + \frac{EI}{L^2}\left(\overline{M}_m' \Psi_n - \overline{M}_n' \Psi_m \right) \right) d\xi \tag{3.105}$$

$\overline{V}_m' Y_n$, $\overline{V}_n' Y_m$, $\overline{M}_m' \Psi_n$ ve $\overline{M}_n' \Psi_m$ çarpımlarının integralleri için kısmi integrasyon yöntemi kullanılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned}(\Omega_n^2 - \Omega_m^2) \int_0^1 \left(AEY_n Y_m + \frac{EI}{L^2}\Psi_n \Psi_m \right) d\xi &= kAG\overline{V}_m Y_n \Big|_0^1 - kAG\overline{V}_n Y_m \Big|_0^1 + \frac{EI}{L^2}\overline{M}_m \Psi_n \Big|_0^1 - \frac{EI}{L^2}\overline{M}_n \Psi_m \Big|_0^1 \\ &+ \int_0^1 kAG\left(\overline{V}_n (Y_m' - \Psi_m) - \overline{V}_m (Y_n' - \Psi_n) \right) d\xi \\ &+ \int_0^1 \frac{EI}{L^2}\left(\overline{M}_n \Psi_m' - \overline{M}_m \Psi_n' \right) d\xi \end{aligned} \tag{3.106}$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafındaki integrallerin içerisindeki terimler de düzenlenir ise

$$(\Omega_n^2 - \Omega_m^2)\int_0^1 \left(AEY_nY_m + \frac{EI}{L^2}\Psi_n\Psi_m\right)d\xi$$
$$= kAG\overline{V}_mY_n\Big|_0^1 - kAG\overline{V}_nY_m\Big|_0^1 + \frac{EI}{L^2}\overline{M}_m\Psi_n\Big|_0^1 - \frac{EI}{L^2}\overline{M}_n\Psi_m\Big|_0^1 \qquad (3.107)$$
$$+\int_0^1 kAG\left(\overline{V}_n\overline{V}_m - \overline{V}_m\overline{V}_n\right)d\xi + \int_0^1 \frac{EI}{L^2}\left(\overline{M}_n\overline{M}_m - \overline{M}_m\overline{M}_n\right)d\xi$$

olarak bulunur. Gerekli sadeleştirme işlemlerinden sonra

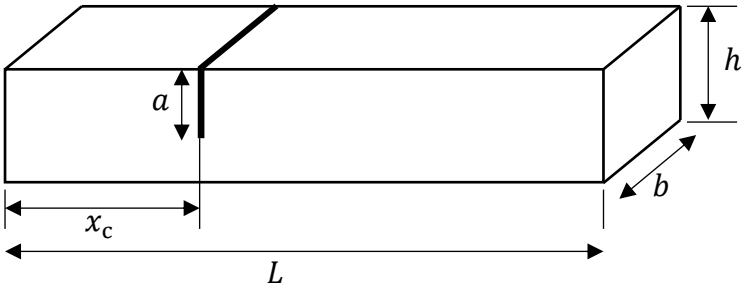
$$(\Omega_n^2 - \Omega_m^2)\int_0^1 \left(AEY_nY_m + \frac{EI}{L^2}\Psi_n\Psi_m\right)d\xi$$
$$= kAG\left(\overline{V}_m(1)Y_n(1) - \overline{V}_m(0)Y_n(0) - \overline{V}_n(1)Y_m(1)\right.$$
$$\left. + \overline{V}_n(0)Y_m(0)\right) \qquad (3.108)$$
$$+\frac{EI}{L^2}\left(\overline{M}_m(1)\Psi_n(1) - \overline{M}_m(0)\Psi_n(0) - \overline{M}_n(1)\Psi_m(1)\right.$$
$$\left. + \overline{M}_n(0)\Psi_m(0)\right)$$

eşitliği sınır şartlarına bağlı olarak bulunmuş olunur.

3.3. Çatlaklı Kirişlerin Titreşimi

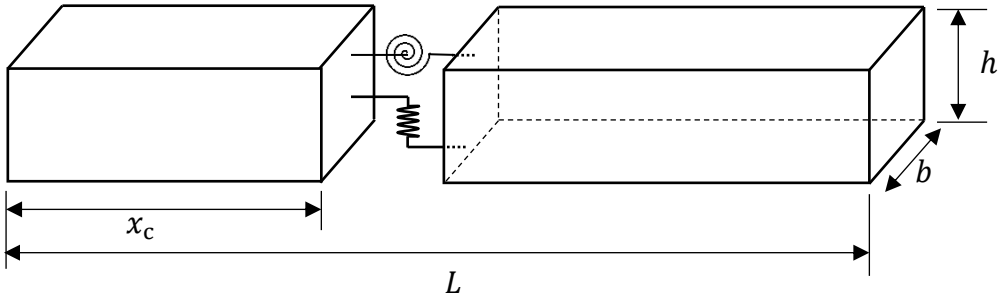
3.3.1. Çatlaklı kirişlerin doğal frekanslarının bulunması

Önceki bölümde Timoshenko kirişlerin yanal yer değiştirmesi, eğilme açısı, moment ve kesme kuvvetleri ifadeleri elde edilmiş olup bu bölümde Şekil 3.3' de boyutları belirtilen çatlaklı kirişlerin analizleri gerçekleştirilecektir.



Şekil 3.3. Çatlaklı kiriş.

Kirişin sol ucundan x_c mesafesinde ve a derinliğine sahip çatlak bulunan bir kirişi, üzerinde bulunan çatlağın öncesi ve sonrasındaki parçaları iki farklı kiriş ve bu kirişlerin Şekil 3.4'te görüldüğü gibi aralarında da bir burulma ve bir de uzama yayı olmak üzere iki yay ile birbirlerine bağlandığı varsayılarak modellemek mümkündür.



Şekil 3.4. Çatlaklı kiriş modeli.

Çatlağın bu şekilde modellenmesi ile yanal yer değiştirmelerde ve eğilmeden kaynaklı oluşan açılarda süreksizlik oluşmakta iken çatlak bölgesinde moment ve kesme kuvvetlerinin sürekliliğinden bahsedilebilmektedir. Denklemlerde kullanılan alt indisler çatlağın öncesindeki kiriş için bir ve çatlağın sonrasındaki kiriş için ikinci kirişi göstermek üzere iki olup, bahsedilen bu şartlar aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Loya ve ark., 2006):

$$y_2(x_c, t) - y_1(x_c, t) = C_q V_2(x_c, t) \tag{3.109}$$

$$\theta_2(x_c, t) - \theta_1(x_c, t) = C_M M_2(x_c, t) \tag{3.110}$$

$$V_1(x_c, t) = V_2(x_c, t) \tag{3.111}$$

$$M_1(x_c, t) = M_2(x_c, t) \tag{3.112}$$

Burada C_M ve C_q yayların esneklik katsayıları olup çatlak derinliği ile kiriş yüksekliği oranına ($\alpha = a/h$) ve kesitin şekline bağlıdır. Dikdörtgensel kiriş için bu fonksiyonlar

$$C_q = \frac{h}{EA}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2 (-0{,}22 + 3{,}82\alpha + 1{,}54\alpha^2 - 14{,}64\alpha^3 + 9{,}6\alpha^4) \tag{3.113}$$

$$C_M = 2\frac{h}{EI}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2 (5{,}93 - 19{,}69\alpha + 37{,}14\alpha^2 - 35{,}84\alpha^3 + 13{,}12\alpha^4) \tag{3.114}$$

olarak belirtilmiştir (Loya ve ark., 2006). (3.109) – (3.112) denklemleri boyutsuz değişkenler cinsinden aşağıdaki şekilde yazılabilirler:

$$Y_2(e) - Y_1(e) = \frac{C_q}{L} kAG\overline{V}_2(e) \tag{3.115}$$

$$\Psi_2(e) - \Psi_1(e) = C_M \frac{EI}{L}\overline{M}_2(e) \tag{3.116}$$

$$\overline{V}_1(e) = \overline{V}_2(e) \tag{3.117}$$

$$\overline{M}_1(e) = \overline{M}_2(e) \tag{3.118}$$

Burada $e = x_c/L$ olarak tanımlanmıştır. (3.115) – (3.118) denklemleri matris formunda

$$\begin{Bmatrix} Y_1(e) \\ \Psi_1(e) \\ \overline{M}_1(e) \\ \overline{V}_1(e) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{C_q}{L}kAG \\ 0 & 1 & -\frac{C_M EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_2(e) \\ \Psi_2(e) \\ \overline{M}_2(e) \\ \overline{V}_2(e) \end{Bmatrix} \tag{3.119}$$

veya

$$\{\mathbf{Z_1}(e)\} = \left[\overline{\boldsymbol{D}}\right]\{\mathbf{Z_2}(e)\} \tag{3.120}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan $\{\mathbf{Z_2}(e)\}$ aşağıda gösterildiği gibi yazılabilir:

$$\{\mathbf{Z_2}(e)\} = \left[\overline{\boldsymbol{D}}\right]^{-1}\{\mathbf{Z_1}(e)\} \tag{3.121}$$

Sabit kesitli bir kiriş için yanal yer değiştirme, dönme açısı, eğilme momenti ve kesme kuvveti fonksiyonları içeren durum vektörü (3.92) denklemindeki gibi ifade edilebileceği gösterilmişti. Bu eşitlik kullanılarak kirişin birinci parçası için

$$\{\mathbf{Z_1}(\xi)\} = [\boldsymbol{B_1}(\xi)]\{\mathbf{C_1}\} \tag{3.122}$$

şeklinde yazılabilir. Kirişin sol ucu ($\xi = 0$) ile çatlak bölgesi ($\xi = e$) arasında kalan birinci kiriş için daha önce gösterilen işlem adımları takip edilerek

$$\{\mathbf{Z_1}(e)\} = [\boldsymbol{B_1}(e)][\boldsymbol{B_1}(0)]^{-1}\{\mathbf{Z_1}(0)\} \tag{3.123}$$

elde edilir. Benzer olarak, çatlak bölgesi ($\xi = e$) ile kirişin sağ ucu ($\xi = 1$) arasında kalan ikinci kiriş için

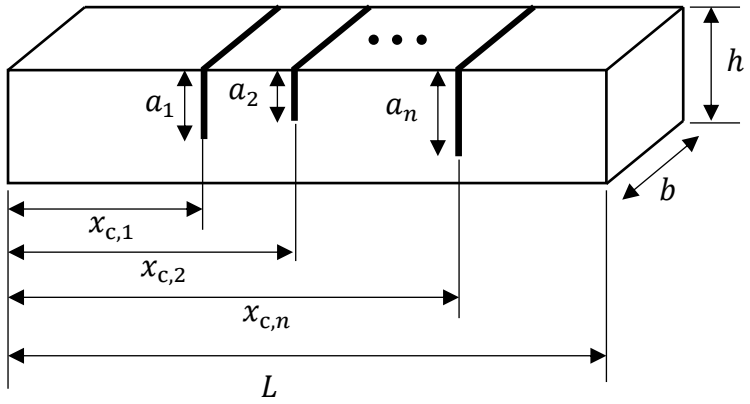
$$\{\mathbf{Z_2}(1)\} = [\boldsymbol{B_2}(1)][\boldsymbol{B_2}(e)]^{-1}\{\mathbf{Z_2}(e)\} \tag{3.124}$$

denklemi yazılabilir. Bu denklemdeki $\{\mathbf{Z_2}(e)\}$ ifadesi için (3.121), denklem (3.121) içindeki $\{\mathbf{Z_1}(e)\}$ için de denklem (3.123) kullanılırsa

$$\{\mathbf{Z_2}(1)\} = [\boldsymbol{B_2}(1)][\boldsymbol{B_2}(e)]^{-1}\left[\overline{\boldsymbol{D}}\right]^{-1}[\boldsymbol{B_1}(e)][\boldsymbol{B_1}(0)]^{-1}\{\mathbf{Z_1}(0)\} \tag{3.125}$$

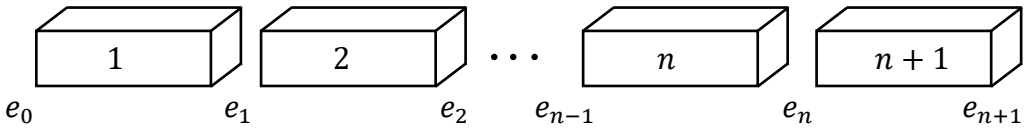
elde edilmiş olunur. Burada $[\boldsymbol{B_1}(\xi)]$ ifadesi için (3.94) denklemi kullanılabilinir iken $[\boldsymbol{B_2}(\xi)]$ ifadesi için (3.94) denklemindeki ξ yerine $(\xi - e)$ yazılarak elde edilen ifadeler kullanılır.

Çatlak sayısının birden fazla olma durumu için benzer yöntem uygulanabilir. Şekil 3.5'de üzerinde çok sayıda çatlak bulunan kiriş boyutları gösterilmiştir. n sayıda çatlak için her bir çatlağın çatlak derinliği $a_1, a_2, \ldots a_n$ olarak gösterilmiştir. Çatlak konumları da her bir çatlak için $x_{c,1}, x_{c,2} \ldots x_{c,n}$ olarak ifade edilmiştir.



Şekil 3.5. Çok sayıda çatlak içeren kiriş

Kirişi çatlak bölgeleri arasında kalan kirişlerin birleşimi şeklinde düşünülebileceği ve bu parçaları aralarında kütlesiz iki yay ile birbirlerine bağlandığı şekilde modellenebileceği tek çatlaklı kiriş için gösterilmişti. Daha genel bir çözüm elde edilmesi açısından çok sayıda çatlak bulunduran kirişler için de benzer olarak çatlak bölgeleri arasında kalan kirişler ayrı kirişler gibi düşünülüp, Şekil 3.6'da gösterildiği gibi numaralandırılmıştır.



Şekil 3.6. Parçalara ayrılmış kirişler

Burada artık tek bir çatlak olmadığı için alt indisler ile boyutsuz çatlak konumları $e_1, e_2 \ldots e_n$ şeklinde belirtilmiştir.

Çatlak bölgelerinden ayrılan her bir kiriş için (3.92) denklemini aşağıdaki gibi genel bir formatta yazmak mümkündür.

$$\{\mathbf{Z_i}(\xi)\} = [\boldsymbol{B_i}(\xi)]\{\mathbf{C_i}\} \quad , i = 1,2,3 \dots n+1 \tag{3.126}$$

Burada $\{\mathbf{Z_i}(\xi)\}$ i. kirişin durum vektörünü, $\{\mathbf{C_i}\}$ ise yine i. kirişin sabit katsayılar vektörlerini göstermektedir.

$$\{\mathbf{Z_i}(\xi)\} = \begin{Bmatrix} Y_i(\xi) \\ \Psi_i(\xi) \\ \overline{M_i}(\xi) \\ \overline{V_i}(\xi) \end{Bmatrix} \quad , \quad \{\mathbf{C_i}\} = \begin{Bmatrix} C_{i,1} \\ C_{i,2} \\ C_{i,3} \\ C_{i,4} \end{Bmatrix} \tag{3.127}$$

ve

$$[\boldsymbol{B_i}(\xi)] = \begin{bmatrix} \sin\beta_1(\xi - e_{i-1}) & \cos\beta_1(\xi - e_{i-1}) & \sinh\beta_2(\xi - e_{i-1}) & \cosh\beta_2(\xi - e_{i-1}) \\ -m_1\cos\beta_1(\xi - e_{i-1}) & m_1\sin\beta_1(\xi - e_{i-1}) & m_2\cosh\beta_2(\xi - e_{i-1}) & m_2\sinh\beta_2(\xi - e_{i-1}) \\ \beta_1 m_1\sin\beta_1(\xi - e_{i-1}) & \beta_1 m_1\cos\beta_1(\xi - e_{i-1}) & \beta_2 m_2\sinh\beta_2(\xi - e_{i-1}) & \beta_2 m_2\cosh\beta_2(\xi - e_{i-1}) \\ (\beta_1 + m_1)\cos\beta_1(\xi - e_{i-1}) & -(\beta_1 + m_1)\sin\beta_1(\xi - e_{i-1}) & (\beta_2 - m_2)\cosh\beta_2(\xi - e_{i-1}) & (\beta_2 - m_2)\sinh\beta_2(\xi - e_{i-1}) \end{bmatrix} \tag{3.128}$$

olarak yazılabilmektedir. Şekil 3.6'da da görüleceği üzere e_0 ve e_{n+1} sırasıyla $\xi = 0$, ve $\xi = 1$ konumlarını ifade etmektedir.

Birinci ve ikinci çatlak konumundaki durum vektörleri (3.123) denklemine benzer olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\{\mathbf{Z_1}(e_1)\} = [\boldsymbol{B_1}(e_1)][\boldsymbol{B_1}(0)]^{-1}\{\mathbf{Z_1}(0)\} \tag{3.129}$$

$$\{\mathbf{Z_2}(e_2)\} = [\boldsymbol{B_2}(e_2)][\boldsymbol{B_2}(e_1)]^{-1}\{\mathbf{Z_2}(e_1)\} \tag{3.130}$$

Birinci ve ikinci parça arasındaki e_1 çatlak konumundaki şartlar

$$\begin{Bmatrix} Y_1(e_1) \\ \Psi_1(e_1) \\ \overline{M}_1(e_1) \\ \overline{V}_1(e_1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{C_{q,1}}{L}kAG \\ 0 & 1 & -\frac{C_{M,1}EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_2(e_1) \\ \Psi_2(e_1) \\ \overline{M}_2(e_1) \\ \overline{V}_2(e_1) \end{Bmatrix} \tag{3.131}$$

veya

$$\{\mathbf{Z_1}(e_1)\} = \left[\overline{\boldsymbol{D}}_\mathbf{1}\right]\{\mathbf{Z_2}(e_1)\} \tag{3.132}$$

matris formunda yazılabilir. (3.129), (3.130) ve (3.132) denklemleri kullanılarak

$$\{\mathbf{Z_2}(e_2)\} = [\boldsymbol{B_2}(e_2)][\boldsymbol{B_2}(e_1)]^{-1}\left[\overline{\boldsymbol{D}}_\mathbf{1}\right]^{-1}[\boldsymbol{B_1}(e_1)][\boldsymbol{B_1}(0)]^{-1}\{\mathbf{Z_1}(0)\} \tag{3.133}$$

eşitliği elde edilir. Burada $[\boldsymbol{U_1}] = \left[\overline{\boldsymbol{D}}_\mathbf{1}\right]^{-1}[\boldsymbol{B_1}(e_1)][\boldsymbol{B_1}(0)]^{-1}$ tanımlaması yapılır ise

$$\{\mathbf{Z_2}(e_2)\} = [\boldsymbol{B_2}(e_2)][\boldsymbol{B_2}(e_1)]^{-1}[\boldsymbol{U_1}]\{\mathbf{Z_1}(0)\} \tag{3.134}$$

olarak yazılabilir. İkinci ve üçüncü çatlak arasında kalan üçüncü kiriş parçası için benzer olarak

$$\{\mathbf{Z_3}(e_3)\} = [\boldsymbol{B_3}(e_3)][\boldsymbol{B_3}(e_2)]^{-1}\{\mathbf{Z_3}(e_2)\} \tag{3.135}$$

ve ikinci çatlaktaki şartlar da

$$\{\mathbf{Z_2}(e_2)\} = \left[\overline{\boldsymbol{D}}_\mathbf{2}\right]\{\mathbf{Z_3}(e_2)\} \tag{3.136}$$

olarak elde edilir. (3.134), (3.135) ve (3.136) denklemleri kullanılarak

$$\{\mathbf{Z_3}(e_3)\} = [\boldsymbol{B_3}(e_3)][\boldsymbol{B_3}(e_2)]^{-1}[\boldsymbol{U_2}][\boldsymbol{U_1}]\{\mathbf{Z_1}(0)\} \tag{3.137}$$

elde edilir. Burada $[\boldsymbol{U_2}] = \left[\overline{\boldsymbol{D_2}}\right]^{-1}[\boldsymbol{B_2}(e_2)][\boldsymbol{B_2}(e_1)]^{-1}$ olarak tanımlanmıştır. Bu işlem adımları tüm çatlak ve bölünen kiriş parçaları için tekrarlanır ise

$$\{\mathbf{Z_{n+1}}(1)\} = [\boldsymbol{T}]\{\mathbf{Z_1}(0)\} \tag{3.138}$$

şeklinde bulunur. Burada $[\boldsymbol{T}] = [\boldsymbol{B_{n+1}}(1)][\boldsymbol{B_{n+1}}(e_n)]^{-1}[\boldsymbol{U_n}][\boldsymbol{U_{n-1}}]$ ... $[\boldsymbol{U_2}][\boldsymbol{U_1}]$ olarak tanımlanan transfer matrisi olup, $[\boldsymbol{U_i}]$ matrisinin $[\boldsymbol{U_i}] = \left[\overline{\boldsymbol{D_i}}\right]^{-1}[\boldsymbol{B_i}(e_i)][\boldsymbol{B_i}(e_{i-1})]^{-1}$ $(i = 1, 2, 3 \ldots n)$ şeklinde genel ifadesi yazılabilir.

Kirişin elastik sınır şartlarına sahip olduğu varsayılarak genel bir bakış açısı kazanılması istenebilir. Bunun için sınır şartları

$$\begin{aligned} V(0,t) &= k_1 y(0,t) + c_1\, \dot{y}(0,t) \\ M(0,t) &= k_{R1}\theta(0,t) + c_{R1}\dot{\theta}(0,t) \\ V(L,t) &= -k_2 y(L,t) - c_2\, \dot{y}(L,t) \\ M(L,t) &= -k_{R2}\theta(L,t) - c_{R2}\dot{\theta}(L,t) \end{aligned} \tag{3.139}$$

olarak ifade edilebilir. Burada k_1, c_1 kirişin sol ucundaki düşey hareket ile ilişkili lineer yay ve sönüm elemanının katsayılarını, k_{R1}, c_{R1} ise dönme hareketi ile ilişkili olarak burulma yayı ile sönüm elemanın katsayılarını göstermektedir. Benzer olarak kirişin sağ ucundaki yay ve sönüm elemanlarının katsayıları da k_2, c_2, k_{R2} ve c_{R2} olarak belirtilmiştir. Daha önce $y(x,t) = LY(x)e^{i\omega t}$ ve $\theta = \Psi(x)e^{i\omega t}$ tanımları yapılmıştı. Bu tanımlamalar (3.139) denkleminde yazılır ve düzenlenir ise boyutsuz parametreler cinsinden

$$d_{1,1} = \frac{k_1 L}{kAG} \quad , \quad d_{1,2} = \frac{c_1}{kAG}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$d_{R1,1} = \frac{k_{R1} L}{EI} \quad , \quad d_{R1,2} = \frac{c_{R1}}{EI}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$d_{2,1} = \frac{k_2 L}{kAG} \quad , \quad d_{2,2} = \frac{c_2}{kAG}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{3.140}$$

$$d_{R2,1} = \frac{k_{R2} L}{EI} \quad , \quad d_{R2,2} = \frac{c_{R2}}{EI}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

olmak üzere

$$F_{R1} = d_{1,1} + i\Omega d_{1,2} \quad , \quad F_{R2} = d_{2,1} + i\Omega d_{2,2}$$

$$M_{R1} = d_{R1,1} + i\Omega d_{R1,2} \quad , \quad M_{R2} = d_{R2,1} + i\Omega d_{R2,2} \tag{3.141}$$

tanımlamaları yapılarak

$$\overline{V}(0) = F_{R1} Y(0)$$

$$\overline{M}(0) = M_{R1} \Psi(0)$$

$$\overline{V}(1) = -F_{R2} Y(1) \tag{3.142}$$

$$\overline{M}(1) = -M_{R2} \Psi(1)$$

şeklinde elde edilir ve (3.138) denkleminde ilgili ifadeler yerlerine yazılarak

$$\begin{Bmatrix} Y_{n+1}(1) \\ \Psi_{n+1}(1) \\ -M_{R2}\Psi_{n+1}(1) \\ -F_{R2}Y_{n+1}(1) \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{T}] \begin{Bmatrix} Y_1(0) \\ \Psi_1(0) \\ M_{R1}\Psi_1(0) \\ F_{R1}Y_1(0) \end{Bmatrix} \tag{3.143}$$

matris formundaki eşitliği yazılabilir. Elde edilen bu eşitlik biraz daha düzenlenerek aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -M_{R2} \\ -F_{R2} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_{n+1}(1) \\ \Psi_{n+1}(1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \\ s_{31} & s_{32} \\ s_{41} & s_{42} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1(0) \\ \Psi_1(0) \end{Bmatrix} \tag{3.144}$$

Burada işlem takibinde kolaylık için

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \\ s_{31} & s_{32} \\ s_{41} & s_{42} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{T}] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & M_{R1} \\ F_{R1} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.145}$$

olarak tanımlanmıştır. (3.144) denklemini iki farklı eşitlik olarak aşağıdaki gibi yazmak mümkündür:

$$\begin{Bmatrix} Y_{n+1}(1) \\ \Psi_{n+1}(1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1(0) \\ \Psi_1(0) \end{Bmatrix} \tag{3.146}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -M_{R2} \\ -F_{R2} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_{n+1}(1) \\ \Psi_{n+1}(1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{31} & s_{32} \\ s_{41} & s_{42} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1(0) \\ \Psi_1(0) \end{Bmatrix} \tag{3.147}$$

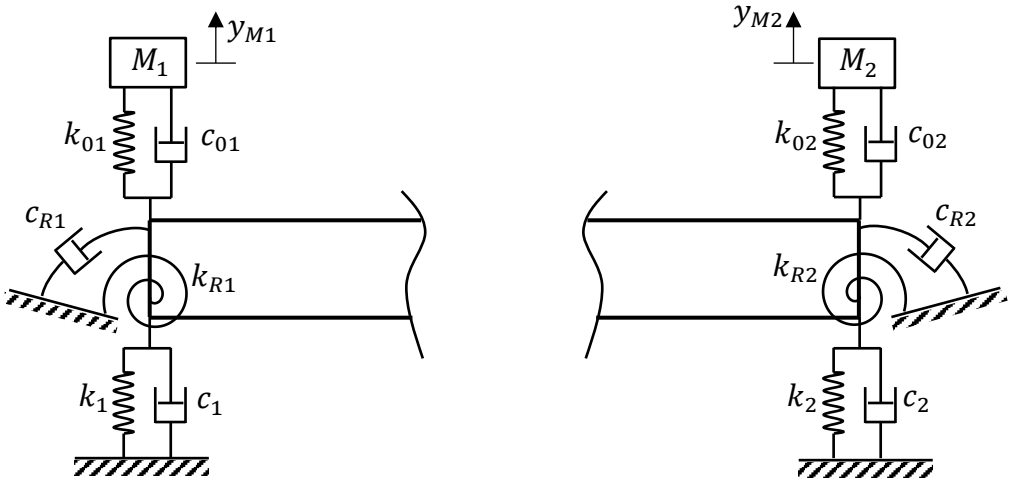
(3.146) denklemi (3.147) denkleminde yerine yazılırsa

$$[\boldsymbol{\Lambda}] \begin{Bmatrix} Y_1(0) \\ \Psi_1(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.148}$$

elde edilir. Burada

$$[\mathbf{\Lambda}] = \begin{bmatrix} 0 & -M_{R2} \\ -F_{R2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_{31} & s_{32} \\ s_{41} & s_{42} \end{bmatrix} \tag{3.149}$$

olarak tanımlanmıştır. (3.148) denkleminde boş olmayan çözüm için, [**Λ**] matrisinin determinantı sıfır olmalıdır. Bu şart kullanılarak sınır şartlarına da bağlı olarak sistemin frekans değerleri bulunabilir.



Şekil 3.7. Uçlarında yay-kütle-damper bulunan ve şekil değiştirebilen sınır şartlarına sahip kiriş modeli.

Elastik sınır şartlarına sahip kiriş modeline ilave olarak, kirişin Şekil 3.7'de gösterildiği gibi iki ucunda kütle-yay-damper sistemi de bulunduğu varsayılmış olsun. Bu durumda sınır şartları

$$\begin{gathered} V(0,t) = k_1 y(0,t) + c_1\, \dot{y}(0,t) + k_{01}\big(y(0,t) - y_{M1}(t)\big) \\ + c_{01}\big(\dot{y}(0,t) - \dot{y}_{M1}(t)\big) \end{gathered}$$

$$M(0,t) = k_{R1}\theta(0,t) + c_{R1}\dot{\theta}(0,t) \tag{3.150}$$

$$\begin{gathered} V(L,t) = -k_2 y(L,t) - c_2\, \dot{y}(L,t) - k_{02}\big(y(L,t) - y_{M2}(t)\big) \\ - c_{02}\big(\dot{y}(L,t) - \dot{y}_{M2}(t)\big) \end{gathered}$$

$$M(L,t) = -k_{R2}\theta(L,t) - c_{R2}\dot{\theta}(L,t)$$

olarak yazılabilir. Burada y_{M1}, y_{M2} ve zamana göre türevlerinin bulunması gerekmektedir. Bu amaçla kiriş hesaplarında kullanılmak üzere yapılan kabule benzer olarak $y_{M1} = LN_1 e^{i\omega t}$ ve $y_{M2} = LN_2 e^{i\omega t}$ formlarında olduğu varsayılsın. M_1 kütleli maddesel nokta için hareket denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$k_{01}\big(y(0,t) - y_{M1}(t)\big) + c_{01}\big(\dot{y}(0,t) - \dot{y}_{M1}(t)\big) = M_1 \ddot{y}_{M1}(t) \tag{3.151}$$

$y(x,t) = LY(x)e^{i\omega t}$ olduğunu da hatırlatarak, bu ifadeler hareket denkleminde yazılır ve gerekli sadeleştirme işlemleri yapılırsa

$$N_1 = \frac{k_{01} + i\omega c_{01}}{(k_{01} + i\omega c_{01} - M_1\omega^2)} Y(0) \tag{3.152}$$

ve

$$y_{M1}(t) = \frac{k_{01} + i\omega c_{01}}{(k_{01} + i\omega c_{01} - M_1\omega^2)} LY(0)e^{i\omega t} \tag{3.153}$$

olarak bulunur. Benzer işlemler M_2 kütlesi için de yazılırsa

$$y_{M2}(t) = \frac{k_{02} + i\omega c_{02}}{(k_{02} + i\omega c_{02} - M_2\omega^2)} LY(L)e^{i\omega t} \tag{3.154}$$

elde edilir. (3.150) denkleminde ilgili ifadeler yazılır ve düzenlenir ise, boyutsuz ifadeler cinsinden

$$\overline{V}(0) = \left(d_{1,1} + i\Omega d_{1,2} + \frac{\Omega^2 d_{M1}\left(d_{01,1} + i\Omega d_{01,2}\right)}{\Omega^2 d_{M1} - d_{01,1} - i\Omega d_{01,2}} \right) Y(0)$$

$$\overline{M}(0) = \left(d_{R1,1} + i\Omega d_{R1,2}\right)\Psi(0)$$

$$\overline{V}(1) = -\left(d_{2,1} + i\Omega d_{2,2} + \frac{\Omega^2 d_{M2}\left(d_{02,1} + i\Omega d_{02,2}\right)}{\Omega^2 d_{M2} - d_{02,1} - i\Omega d_{02,2}} \right) Y(1) \tag{3.155}$$

$$\overline{M}(1) = -\left(d_{R2,1} + i\Omega d_{R2,2}\right)\Psi(1)$$

olarak elde edilir. Burada boyutsuz ifadeler için daha önceki tanımlamalara ilave olarak

$$d_{M1} = \frac{M_1 E}{LkAG\rho} \quad , \quad d_{M2} = \frac{M_2 E}{LkAG\rho}$$

$$d_{01,1} = \frac{k_{01} L}{kAG} \quad , \quad d_{01,2} = \frac{c_{01}}{kAG}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{3.156}$$

$$d_{02,1} = \frac{k_{02} L}{kAG} \quad , \quad d_{02,2} = \frac{c_{02}}{kAG}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

tanımlamaları yapılmıştır. (3.141) denklemindeki ifadeler, bu yeni sistem için yeniden tanımlanırsa

$$F_{R1} = d_{1,1} + i\Omega d_{1,2} + \frac{\Omega^2 d_{M1}\left(d_{01,1} + i\Omega d_{01,2}\right)}{\Omega^2 d_{M1} - d_{01,1} - i\Omega d_{01,2}}$$

$$F_{R2} = d_{2,1} + i\Omega d_{2,2} + \frac{\Omega^2 d_{M2}\left(d_{02,1} + i\Omega d_{02,2}\right)}{\Omega^2 d_{M2} - d_{02,1} - i\Omega d_{02,2}} \tag{3.157}$$

$$M_{R1} = d_{R1,1} + i\Omega d_{R1,2} \quad , \qquad M_{R2} = d_{R2,1} + i\Omega d_{R2,2}$$

olarak elde edilir. Bu tanımlamalar ile, (3.143) – (3.149) denklemleri kullanılarak sistemin doğal frekansları elde edilebilmektedir.

Sistemde sönüm elemanının varlığı doğal frekans sonuçlarını kompleks kök cinsinden bulunmasına sebep olacaktır. Bu yüzden

$$\omega = \omega_R + i\omega_I \tag{3.158}$$

olduğu düşünülür ise bu ifadede reel kısım salınım hareketinden sorumlu olurken sanal kısım sistemin sönümü ile ilişkilidir.

3.3.2. Çatlaklı kirişlerin mod şekillerinin bulunması

Çatlaklı kirişlerin mod şekillerinin elde edilmesi için (3.126) denklemindeki $\{\mathbf{C_i}\}$ katsayı vektörünün bulunması gerekmektedir. Çatlak bölgeleri ile ayrılan her bir kiriş için bu katsayıların $\{\mathbf{C_1}\},\{\mathbf{C_2}\},\{\mathbf{C_3}\}\dots\{\mathbf{C_{n+1}}\}$ şeklinde gösterildiğini belirterek bu katsayıların birbirleri ile olan ilişkileri elde edilmelidir. Bu aradaki ilişki için her bir kiriş parçası ve çatlak bölgelerinde durum vektörleri yazılarak bulunabilir. Birinci ve ikinci kiriş parçaları için durum vektörlerinin

$$\{\mathbf{Z_1}(\xi)\} = [\boldsymbol{B_1}(\xi)]\{\mathbf{C_1}\} \tag{3.159}$$

$$\{\mathbf{Z_2}(\xi)\} = [\boldsymbol{B_2}(\boldsymbol{\xi})]\{\mathbf{C_2}\} \tag{3.160}$$

olarak ve birinci çatlak bölgesindeki şartları kullanarak, ilgili çatlak bölgesindeki eşitliğinin de

$$\{\mathbf{Z_2}(e_1)\} = \left[\overline{\boldsymbol{D_1}}\right]^{-1}\{\mathbf{Z_1}(e_1)\} \tag{3.161}$$

şeklinde yazılabileceği önceki bölümlerde gösterilmişti. (3.159) ve (3.160) denklemlerinde $\xi = e_1$ yazılır ve bu eşitlikler de (3.161) denkleminde yerlerine yazılarak düzenlenir ise $\{\mathbf{C_1}\}$ ve $\{\mathbf{C_2}\}$ arasındaki ilişki aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\{\mathbf{C_2}\} = [\boldsymbol{B_2}(e_1)]^{-1}\left[\overline{\boldsymbol{D_1}}\right]^{-1}[\boldsymbol{B_1}(e_1)]\{\mathbf{C_1}\} \tag{3.162}$$

Benzer işlemler diğer kiriş parçaları ve çatlak şartları için de yazılırsa, daha genel bir şekilde eşitliği $i = 1,2,3 \ldots n$ olmak üzere

$$\{\mathbf{C_{i+1}}\} = [\boldsymbol{B_{i+1}}(e_i)]^{-1}\left[\overline{\boldsymbol{D_i}}\right]^{-1}[\boldsymbol{B_i}(e_i)]\{\mathbf{C_i}\} \tag{3.163}$$

şeklinde yazılabilir.

$\xi = 0$ ve $\xi = 1$ konumlarındaki sınır şartları (3.142) denkleminde belirtilmişti. Belirtilen bu sınır şartları matris formunda $\xi = 0$ için

$$\begin{gathered}\{\mathbf{h_1}\} = [(\beta_1 + m_1) \quad 0 \quad (\beta_2 - m_2) \quad 0] - F_{R1}[0 \quad 1 \quad 0 \quad 1] \\ \{\mathbf{h_2}\} = [0 \quad \beta_1 m_1 \quad 0 \quad \beta_2 m_2] - M_{R1}[-m_1 \quad 0 \quad m_2 \quad 0]\end{gathered} \tag{3.164}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix}\{\mathbf{h_1}\} \\ \{\mathbf{h_2}\}\end{bmatrix}\{\mathbf{C_1}\} = \begin{Bmatrix}0 \\ 0\end{Bmatrix} \tag{3.165}$$

ve $\xi = 1$ için

$$\begin{bmatrix}\{\mathbf{h_3}\} + \{\mathbf{h_4}\} \\ \{\mathbf{h_5}\} + \{\mathbf{h_6}\}\end{bmatrix}\{\mathbf{C_{n+1}}\} = \begin{Bmatrix}0 \\ 0\end{Bmatrix} \tag{3.166}$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\{\mathbf{h_3}\}$$
$$= [(\beta_1 + m_1)\cos\beta_1(1-e_n) \quad -(\beta_1 + m_1)\sin\beta_1(1-e_n) \quad (\beta_2 - m_2)\cosh\beta_2(1-e_n) \quad (\beta_2 - m_2)\sinh\beta_2(1-e_n)]$$

$$\{\mathbf{h_4}\} = F_{R2}[\sin\beta_1(1-e_n) \quad \cos\beta_1(1-e_n) \quad \sinh\beta_2(1-e_n) \quad \cosh\beta_2(1-e_n)] \tag{3.167}$$

$$\{\mathbf{h_5}\} = [\beta_1 m_1 \sin\beta_1(1-e_n) \quad \beta_1 m_1 \cos\beta_1(1-e_n) \quad \beta_2 m_2 \sinh\beta_2(1-e_n) \quad \beta_2 m_2 \cosh\beta_2(1-e_n)]$$

$$\{\mathbf{h_6}\} = M_{R2}[-m_1 \cos\beta_1(1-e_n) \quad m_1 \sin\beta_1(1-e_n) \quad m_2 \cosh\beta_2(1-e_n) \quad m_2 \sinh\beta_2(1-e_n)]$$

olarak tanımlanmışlardır. (3.138) ve (3.126) denklemleri göz önünde bulundurularak

$$\{\mathbf{C_{n+1}}\} = [\boldsymbol{B_{n+1}}(1)]^{-1}[\boldsymbol{T}][\boldsymbol{B_1}(0)]\{\mathbf{C_1}\} \tag{3.168}$$

düzenlenmiş şekli ile yazmak mümkündür. (3.166) denkleminde $\{\mathbf{C_{n+1}}\}$ yerine (3.168) denkleminde elde edilen ifade yazılırsa

$$\begin{bmatrix}\{\mathbf{h_7}\}\\ \{\mathbf{h_8}\}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\{\mathbf{h_3}\} + \{\mathbf{h_4}\}\\ \{\mathbf{h_5}\} + \{\mathbf{h_6}\}\end{bmatrix}[\boldsymbol{B_{n+1}}(1)]^{-1}[\boldsymbol{T}][\boldsymbol{B_1}(0)] \tag{3.169}$$

olmak üzere aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{bmatrix}\{\mathbf{h_7}\}\\ \{\mathbf{h_8}\}\end{bmatrix}\{\mathbf{C_1}\} = \begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \tag{3.170}$$

(3.165) ve (3.170) denklemleri birleştirilerek

$$\begin{bmatrix}\{\mathbf{h_1}\}\\ \{\mathbf{h_2}\}\\ \{\mathbf{h_7}\}\\ \{\mathbf{h_8}\}\end{bmatrix}\{\mathbf{C_1}\} = \begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\end{Bmatrix} \tag{3.171}$$

şeklinde elde edilir. $\{\mathbf{C_1}\} = \left[C_{1,1}\ C_{1,2}\ C_{1,3}\ C_{1,4}\right]^{\mathrm{T}}$ olduğunu hatırlatarak, bu katsayılar vektörü $C_{1,1}$ parantezine alınırsa aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{bmatrix}\{\mathbf{h_1}\}\\ \{\mathbf{h_2}\}\\ \{\mathbf{h_7}\}\\ \{\mathbf{h_8}\}\end{bmatrix}\{\overline{\mathbf{C}}_\mathbf{1}\}C_{1,1}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\end{Bmatrix} \tag{3.172}$$

Burada $\{\overline{\mathbf{C}}_\mathbf{1}\}=\begin{bmatrix}1 & \overline{C}_{1,2} & \overline{C}_{1,3} & \overline{C}_{1,4}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=[1 \quad C_{1,2}/C_{1,1} \quad C_{1,3}/C_{1,1} \quad C_{1,4}/C_{1,1}]^{\mathrm{T}}$ olarak tanımlanmıştır. Bu durumda (3.172) denklemi $C_{1,1}$'in sıfırdan farklı bir değeri için

$$\begin{bmatrix}\{\mathbf{h_1}\}\\ \{\mathbf{h_2}\}\\ \{\mathbf{h_7}\}\\ \{\mathbf{h_8}\}\end{bmatrix}\{\overline{\mathbf{C}}_\mathbf{1}\}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\end{Bmatrix} \tag{3.173}$$

eşitliğini sağlamalıdır. Bu eşitlik için çözüm yapılarak $\{\overline{\mathbf{C}}_\mathbf{1}\}$ vektörü bulunabilir. Elde edilen bu değerler ile halen $\{\mathbf{C_1}\}$ vektörünün $C_{1,1}$ bilinmeyen değerine bağlı olduğunu hatırlatmak gerekmektedir. (3.163) denkleminden de görüleceği üzere her bir bölünmüş kirişe ait katsayılar vektörü diğer katsayı vektörleri cinsinden yazılabileceği için tüm katsayılar $C_{1,1}$'e bağlı olarak bulunabileceğinden, bu değerin elde edilmesi gerekmektedir. $C_{1,1}$'in elde edilmesi için daha önceki bölümlerde elde edilen diklik şartı kullanılabilir.

(3.142) denklemindeki ifadeler (3.108) denkleminde eşitliğin sağ tarafındaki ilgili yerlere yazılır ve EK 2'de gösterildiği gibi ara işlemler yapılarak,

$$(\Omega_l^2-\Omega_m^2)\Bigg(\int_0^1\left(AEY_lY_m+\frac{EI}{L^2}\Psi_l\Psi_m\right)d\xi$$
$$-kAG\Bigg(Y_m(1)Y_l(1)\Bigg(i\left(\frac{d_{2,2}}{(\Omega_l+\Omega_m)}-\frac{2\Omega_l\Omega_m d_{M2}d_{02,1}d_{02,2}}{(\Omega_l+\Omega_m)\Gamma_2}\right.$$
$$\left.+\frac{\Omega_l^2\Omega_m^2 d_{M2}^2 d_{02,2}}{(\Omega_l+\Omega_m)\Gamma_2}-\frac{(\Omega_l^2+\Omega_m^2)d_{M2}d_{02,2}d_{02,1}}{(\Omega_l+\Omega_m)\Gamma_2}\right)-\frac{d_{M2}d_{02,1}^2}{\Gamma_2}$$
$$+\frac{\Omega_l\Omega_m d_{M2}d_{02,2}^2}{\Gamma_2}\Bigg)$$
$$+Y_m(0)Y_l(0)\Bigg(i\left(\frac{d_{1,2}}{(\Omega_l+\Omega_m)}-\frac{2\Omega_l\Omega_m d_{01,2}d_{M1}d_{01,1}}{(\Omega_l+\Omega_m)\Gamma_1}\right. \qquad (3.174)$$
$$\left.+\frac{\Omega_l^2\Omega_m^2 d_{M1}^2 d_{01,2}}{(\Omega_l+\Omega_m)\Gamma_1}-\frac{(\Omega_l^2+\Omega_m^2)d_{M1}d_{01,2}d_{01,1}}{(\Omega_l+\Omega_m)\Gamma_1}\right)-\frac{d_{M1}d_{01,1}^2}{\Gamma_1}$$
$$+\frac{\Omega_l\Omega_m d_{M1}d_{01,2}^2}{\Gamma_1}\Bigg)\Bigg)$$
$$-\frac{EI}{L^2}\Bigg(\Psi_l(1)\Psi_m(1)\left(\frac{id_{R2,2}}{(\Omega_l+\Omega_m)}\right)$$
$$+\Psi_l(0)\Psi_m(0)\left(\frac{id_{R1,2}}{(\Omega_l+\Omega_m)}\right)\Bigg)\Bigg)=0$$

olarak bulunur. $l\neq m$ durumunda bu denklemin sağlanması için $(\Omega_l^2-\Omega_m^2)$ ifadesini çarpan parantez içerisindeki ifadelerin sonucu sıfır olmalı iken $l=m$ durumunda ise parantez içerisindeki ifadenin bire eşit alınması ile normalleştirme yapılmış olunur. Bu şartlarda

$$\int_0^1 \left(AEY_lY_m + \frac{EI}{L^2}\Psi_l\Psi_m\right)d\xi$$

$$\begin{aligned}
&- kAG\left(Y_m(1)Y_l(1)\left(i\left(\frac{d_{2,2}}{(\Omega_l+\Omega_m)} - \frac{2\Omega_l\Omega_m d_{M2}d_{02,1}d_{02,2}}{(\Omega_l+\Omega_m)\Gamma_2}\right.\right.\right.\\
&\left.\left.\left.+\frac{\Omega_l^2\Omega_m^2 d_{M2}^2 d_{02,2}}{(\Omega_l+\Omega_m)\Gamma_2} - \frac{(\Omega_l^2+\Omega_m^2)d_{M2}d_{02,2}d_{02,1}}{(\Omega_l+\Omega_m)\Gamma_2}\right) - \frac{d_{M2}d_{02,1}^2}{\Gamma_2}\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{\Omega_l\Omega_m d_{M2}d_{02,2}^2}{\Gamma_2}\right)\right.\\
&+ Y_m(0)Y_l(0)\left(i\left(\frac{d_{1,2}}{(\Omega_l+\Omega_m)} - \frac{2\Omega_l\Omega_m d_{01,2}d_{M1}d_{01,1}}{(\Omega_l+\Omega_m)\Gamma_1}\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{\Omega_l^2\Omega_m^2 d_{M1}^2 d_{01,2}}{(\Omega_l+\Omega_m)\Gamma_1} - \frac{(\Omega_l^2+\Omega_m^2)d_{M1}d_{01,2}d_{01,1}}{(\Omega_l+\Omega_m)\Gamma_1}\right) - \frac{d_{M1}d_{01,1}^2}{\Gamma_1}\right.\\
&\left.+\frac{\Omega_l\Omega_m d_{M1}d_{01,2}^2}{\Gamma_1}\right)\Bigg)\\
&- \frac{EI}{L^2}\left(\Psi_l(1)\Psi_m(1)\left(\frac{id_{R2,2}}{(\Omega_l+\Omega_m)}\right) + \Psi_l(0)\Psi_m(0)\left(\frac{id_{R1,2}}{(\Omega_l+\Omega_m)}\right)\right)\\
&= \delta_{lm}
\end{aligned} \tag{3.175}$$

olarak diklik şartını yazmak mümkündür. n adet çatlak bulunan kirişte, $l = m$ olduğu durumda integral sınırları çatlak konumlarına uyacak şekilde ve takip kolaylığı için

$$\begin{aligned}
\Upsilon = -kAG&\left(Y^2(1)\left(i\left(\frac{d_{2,2}}{2\Omega} + \frac{\Omega^3 d_{M2}^2 d_{02,2}}{2\Gamma_2} - \frac{2\Omega d_{M2}d_{02,2}d_{02,1}}{\Gamma_2}\right) - \frac{d_{M2}d_{02,1}^2}{\Gamma_2}\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{\Omega^2 d_{M2}d_{02,2}^2}{\Gamma_2}\right)\right.\\
&+ Y^2(0)\left(i\left(\frac{d_{1,2}}{2\Omega} + \frac{\Omega^3 d_{M1}^2 d_{01,2}}{2\Gamma_1} - \frac{2\Omega d_{M1}d_{01,2}d_{01,1}}{\Gamma_1}\right) - \frac{d_{M1}d_{01,1}^2}{\Gamma_1}\right.\\
&\left.\left.+\frac{\Omega^2 d_{M1}d_{01,2}^2}{\Gamma_1}\right)\right) - \frac{EI}{L^2}\left(\Psi^2(1)\left(\frac{id_{R2,2}}{2\Omega}\right) + \Psi^2(0)\left(\frac{id_{R1,2}}{2\Omega}\right)\right)
\end{aligned} \tag{3.176}$$

tanımlaması yapılarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\sum_{j=1}^{n+1}\int_{e_{j-1}}^{e_j}\left(AEY_j^2(\xi)+\frac{EI}{L^2}\Psi_j^2(\xi)\right)d\xi+\Upsilon=1 \tag{3.177}$$

Burada $Y_j(\xi)=C_{1,1}\overline{Y}_j(\xi)$ ve $\Psi_j(\xi)=C_{1,1}\overline{\Psi}_j(\xi)$ olarak tanımlanırsa ve

$$\begin{Bmatrix}\overline{Y}_j(\xi)\\ \overline{\Psi}_j(\xi)\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\sin\beta_1(\xi-e_{j-1}) & \cos\beta_1(\xi-e_{j-1}) & \sinh\beta_2(\xi-e_{j-1}) & \cosh\beta_2(\xi-e_{j-1})\\ -m_1\cos\beta_1(\xi-e_{j-1}) & m_1\sin\beta_1(\xi-e_{j-1}) & m_2\cosh\beta_2(\xi-e_{j-1}) & m_2\sinh\beta_2(\xi-e_{j-1})\end{bmatrix}\{\overline{C}_j\} \tag{3.178}$$

olmak üzere

$$C_{1,1}=\sqrt{\frac{1}{\sum_{j=1}^{n+1}\int_{e_{j-1}}^{e_j}\left(AE\overline{Y}_j^2(\xi)+\frac{EI}{L^2}\overline{\Psi}_j^2(\xi)\right)d\xi+\overline{\Upsilon}}} \tag{3.179}$$

şeklinde bulunabilir. Burada $\overline{\Upsilon}$ aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}\overline{\Upsilon}=-kAG\Bigg(&\overline{Y}^2(1)\left(i\left(\frac{d_{2,2}}{2\Omega}+\frac{\Omega^3d_{M2}^2d_{02,2}}{2\Gamma_2}-\frac{2\Omega d_{M2}d_{02,2}d_{02,1}}{\Gamma_2}\right)-\frac{d_{M2}d_{02,1}^2}{\Gamma_2}\right.\\ &\left.+\frac{\Omega^2d_{M2}d_{02,2}^2}{\Gamma_2}\right)\\ &+\overline{Y}^2(0)\left(i\left(\frac{d_{1,2}}{2\Omega}+\frac{\Omega^3d_{M1}^2d_{01,2}}{2\Gamma_1}-\frac{2\Omega d_{M1}d_{01,2}d_{01,1}}{\Gamma_1}\right)-\frac{d_{M1}d_{01,1}^2}{\Gamma_1}\right.\\ &\left.+\frac{\Omega^2d_{M1}d_{01,2}^2}{\Gamma_1}\right)\Bigg)-\frac{EI}{L^2}\left(\overline{\Psi}^2(1)\left(\frac{id_{R2,2}}{2\Omega}\right)+\overline{\Psi}^2(0)\left(\frac{id_{R1,2}}{2\Omega}\right)\right)\end{aligned} \tag{3.180}$$

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Önceki bölümün ilk kısmında değişken kesit alanına sahip çubukların boyuna serbest titreşimlerinin analizi için bir yöntem önerilmiş ve bazı kesitler için bu yöntem kullanılarak incelemeler gerçekleştirilmiştir. Sonraki kısmında ise üzerinde tek taraflı ve keyfi sayıda çatlak bulunan esnek sınır şartlarına sahip Timoshenko kirişlerin yanal titreşimleri çalışılmıştır. Bu bölümde, önceki bölümde yapılan incelemeler sonucunda elde edilen ifadeler için sayısal örnekler gerçekleştirilmiş ve parametrelerin etkileri tartışılmıştır. Sayısal örnekler için MATLAB programı kullanılmış olup yazılan fonksiyon dosyalarının kodları EK 3'te belirtilmiştir.

4.1. Çubuklar İçin Sayısal Örnekler ve Parametrelerin Etkisi

Kısım 3.1'de değişken kesitli çubukların bazı kesit durumları için frekans denklemleri elde edilmişti. Kesit değişimlerinin doğal frekanslar üzerine etkileri çizelgelerde gösterilmiş olup ayrıca elde edilen sonuçların doğruluklarını göstermek açısından bazı kesitler için elde edilen doğal frekanslar literatürdeki çalışmalar ile mukayese edilerek aşağıdaki çizelgelerde gösterilmişlerdir.

$A(x) = \left(\sqrt{A_0} + cx\right)^2$ kesit alanına sahip çubuk için çözüm kısım 3.1.2'de elde edilmişti. Bu ifade biraz düzenlenerek Abrate (1995)'te incelenen kesitlerden olan $A(x) = (1 + \alpha x/L)^2$ ifadesi $\alpha = cL/\sqrt{A_0}$ yazılarak elde edilebilir. (3.27) denklemi de düzenlenir ise $\alpha \tan\sqrt{k_1}L = (1+\alpha)\sqrt{k_1}L$ olarak bulunur. Bu frekans denklemi bahsedilen makaledeki elde edilen eşitlik ile aynı olmakla birlikte α'nın bazı değerleri için boyutsuz doğal frekanslar Çizelge 4.1'de sunulmuştur. α'nın artması ile boyutsuz frekanslarda düşüş görülürken, değişimin ilk modlarda daha fazla olduğu yüksek modlarda ise etkisinin azaldığı görülmüştür.

Çizelge 4.1. Sabit-serbest sınır şartları altında ve kesit alanı $A(x) = (1 + \alpha x/L)^2$ olan çubuk için boyutsuz doğal frekanslar.

Mod	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
1	1,165561	0,967403
2	4,604217	4,567452
3	7,789884	7,768373
4	10,949944	10,934682
5	14,101725	14,089887

Kesit alanı $A(x) = A_0 e^{-k_0 x}$ şeklinde değişen bir çubuk için sabit-serbest sınır şartları altındaki frekans denklemi kısım 3.1.3'te belirtilmişti. Farklı ζ_1 ($\zeta_1 = k_0 L$)) değerlerine karşılık boyutsuz doğal frekanslardaki $\left(\sqrt{k_1} L\right)$ değişim Çizelge 4.2'de gösterilmiştir. ζ_1'in artması ile frekanslarda bir artış olduğu ve düşük modlarda ζ_1'in değişiminden daha fazla etkilendikleri görülmüştür.

Çizelge 4.2. Sabit-serbest sınır şartları altında ve kesit alanı $A(x) = A_0 e^{-k_0 x}$ olan çubuk için boyutsuz doğal frekanslar.

Mod	$\zeta_1 = 1$	$\zeta_1 = 2$	$\zeta_1 = 3$
1	1,903441432	2,261826334	2,641779394
2	4,841728744	5,013914841	5,223644878
3	7,932825676	8,041088642	8,177217343
4	11,05214563	11,13055083	11,23017083
5	14,18124927	14,24258608	14,32087492

$A(x) = A_0 \sinh^2(px + r)$ şeklinde bir kesit değişimine sahip çubuğun sabit-serbest sınır şartları için frekans denklemi (3.42) denkleminde belirtilmişti. ζ_2 ($\zeta_2 = pL$) değişiminin boyutsuz doğal frekanslar $\left(\sqrt{k_1} L\right)$ üzerine etkisi Çizelge 4.3'de gösterilmiştir. İlk modlardaki frekanslar ζ_2 artışından daha fazla etkilenirken, yüksek modlarda bu etki azalmaktadır.

Çizelge 4.3. Sabit-serbest sınır şartları altında ve kesiti $A(x) = A_0 \sinh^2(px + r)$ olarak değişen bir çubuğun boyutsuz doğal frekansları.

Mod	$\zeta_2 = 1$	$\zeta_2 = 2$	$\zeta_2 = 10$
1	4,595233387	4,717611613	10,58695194
2	7,784915569	7,854190152	12,14167348
3	10,94647211	10,99519723	14,29933901
4	14,09904922	14,13670982	16,7999795
5	17,24760237	17,27831852	19,4996681

Kesit alanı $A(x) = A_0 \sin^2(px + r)$ şeklinde değişen çubuklar için frekans denklemi (3.49) denkleminde elde edilmişti. Önceki çalışmalar ile karşılaştırmak için boyutsuz doğal frekanslar $\left(\sqrt{k_1}L\right)$ şeklinde bulunmuş ve Çizelge 4.4'te Kumar ve Sujith (1997)'in çalışmasındaki sonuçlar ile kıyaslanmıştır. Sonuçlara bakıldığında p'nin artmasının frekanslarda artışa sebep olduğu ayrıca düşük modlarda frekans değişimi üzerinde daha etkili olduğu görülmüştür.

Çizelge 4.4. Sabit-serbest sınır şartları altında ve kesiti $A(x) = A_0 \sin^2(px + r)$ olarak değişen bir çubuğun boyutsuz doğal frekansları. ($r = 1$ ve $L = 1$)

	$p = 1$		$p = 2$	
Mod	Kumar ve Sujith (1997)	Bu çalışma	Kumar ve Sujith (1997)	Bu çalışma
1	1,517638	1,517637303	2,148560	2,148559689
2	4,702145	4,702144829	5,535762	5,535762297
3	7,848311	7,848310973	8,632812	8,632811018
4	10,991620	10,99162079	11,694640	11,69464089
5	14,134120	14,13412338	14,757860	14,75785762

Çubukların boyuna titreşimi için önerilen çözüm yönteminin çubuğun kademeli olması durumundaki uygulanabilirliği kısım 3.1.8'de gösterilmişti. Çubuğun çift kademeli olması durumundaki frekans denklemi elde edilmiş ve bir ucu sabit diğer ucu serbest sınır şartları için (3.76) denkleminde belirtilmişti. $\zeta_4 = 2$, $c_1 = 0.1$ ve $c_2 = 0.15$ değerlerine

sahip çift kademeli bir çubuğun boyutsuz doğal frekanslarının ($\sqrt{k_1}L_1$) g_1 ile değişimi Çizelge 4.5'te gösterilmiştir.

Çizelge 4.5. Sabit-serbest sınır şartlarına sahip ve kesit alan değişimi her kademe için $A_i(x) = \left(\sqrt{A_0} + c_i x\right)^2$ olan çift kademeli çubuğun boyutsuz doğal frekansları

Mod	$g_1 = 0.1$	$g_1 = 0.5$	$g_1 = 1$
1	0,221764	0,388152	0,442468
2	1,572508	1,555292	1,558453
3	2,665862	2,625285	2,61964
4	3,583836	3,629901	3,644073
5	4,712972	4,707242	4,708296

4.2. Kirişler İçin Sayısal Örnekler ve Parametrelerin Etkisi

Çatlaklı ve esnek sınır şartlarına sahip Timoshenko kirişlerin doğal frekanslarının ve mod şekillerinin bulunması için kısım 3.3'te analizler gerçekleştirilmişti. Sınır şartlarının ve çatlak parametrelerinin doğal frekanslar üzerine etkilerinin anlaşılması için bu bölümde sayısal örnekler gerçekleştirilmiş ve çizelgelerde sunulmuştur.

Kiriş sınır şartlarının etkilerini incelemeden önce kirişin uçlarında bulunan yay ve sönüm elemanlarının hangi değerlere kadar sonuçları etkilediğinin de bilinmesi gerekmektedir. Bunun için her bir elemanın (yay, damper) ayrı ayrı var oldukları varsayılmış olup çatlaksız ve bir çatlaklı kiriş için analizler gerçekleştirilmiştir. Malzeme özellikleri ve kiriş boyutları $E = 200$ GPa, $\nu = 0.3$, $\rho = 7850$ kg/m^3, $k = 5/6$, $L = 0.2$ m, $h = 0.03$ m ve $b = 0.015$ m için analiz sonuçları tablolaştırılmıştır.

Çizelge 4.6 – Çizelge 4.9'da çatlaksız kirişler için sınır koşullarının doğal frekanslar üzerine olan etkileri gösterilmiştir. Lineer ve burulma yay katsayılarını içeren boyutsuz ifadeler $d_{1,1} = d_{2,1} = 10^6$'dan ve $d_{R1,1} = d_{R2,1} = 10^6$'dan büyük değerleri için sonuçlarda çok az değişimler olduğu gözlemlenmiştir. Sönüm elemanlarının etkilerine bakıldığında ise $d_{1,2} = d_{2,2} = 10^8$'den sonra ve $d_{R1,2} = d_{R2,2} = 10^8$'den itibaren

değişimler ihmal edilebilecek boyutlardadırlar. Bu ifadelerin daha büyük değerleri için elde edilen sonuçlarda sanal kısmın sıfıra çok yakın olduğu ve bu parametrelerin yüksek değerlerinin tamamında aynı sonuçların elde edildiği gözlemlenmiştir.

Çizelge 4.6. Lineer yayın çatlaksız kiriş frekanslarına etkisi

$d_{1,1}, d_{2,1}$	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
10^{-6}	0,00080064	0,0013714	0,89981	2,2202	3,8522
10^{-4}	0,0080052	0,013714	0,89993	2,2203	3,8522
10^{-2}	0,078875	0,13681	0,91262	2,2247	3,8544
1	0,37297	1,0801	1,7702	2,7018	4,0967
10^{2}	0,41171	1,499	2,9918	4,6919	6,4899
10^{4}	0,41214	1,504	3,0095	4,7307	6,557
10^{6}	0,41214	1,5041	3,0097	4,731	6,5577
10^{8}	0,41214	1,5041	3,0097	4,731	6,5577
10^{10}	0,41214	1,5041	3,0097	4,731	6,5577
10^{12}	0,41214	1,5041	3,0097	4,731	6,5577

Çizelge 4.7. Burulma yayının çatlaksız kiriş frekanslarına etkisi

$d_{R1,1}, d_{R2,1}$	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
10^{-4}	0,0020978	0,89982	2,2203	3,8522	5,6239
10^{-2}	0,020952	0,90129	2,2216	3,8534	5,625
1	0,18724	1,0181	2,3377	3,9596	5,7247
10^{2}	0,40454	1,4801	2,9693	4,6777	6,4952
10^{4}	0,41206	1,5038	3,0093	4,7305	6,557
10^{6}	0,41214	1,5041	3,0097	4,731	6,5577
10^{8}	0,41214	1,5041	3,0097	4,731	6,5577
10^{10}	0,41214	1,5041	3,0097	4,731	6,5577
10^{12}	0,41214	1,5041	3,0097	4,731	6,5577
10^{14}	0,41214	1,5041	3,0097	4,731	6,5577

Çizelge 4.8. Lineer sönüm elemanının çatlaksız kiriş frekanslarına etkisi

$d_{1,2}$ $d_{2,2}$	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
0,1	0,88569 + 0,11549i	2,2115 + 0,09923i	3,8464 + 0,085191i	5,6197 + 0,072572i	7,448 + 0,060813i
0,3	0,74649 + 0,34244i	2,1378 + 0,29043i	3,7985 + 0,25109i	5,586 + 0,21475i	7,4238 + 0,18045i
0,5	0,42964 + 0,28461i	1,9748 + 0,43762i	3,698 + 0,39792i	5,5167 + 0,34602i	7,3747 + 0,29333i
1	0,4128 + 0,11157i	1,6123 + 0,34661i	3,3198 + 0,5022i	5,2168 + 0,53137i	7,1524 + 0,49491i
10^2	0,41214 + 0,0010564i	1,5041 + 0,0034058i	3,0097 + 0,0059061i	4,7311 + 0,0080985i	6,5577 + 0,0099198i
10^6	0,41214 + 1,056(10^{-7})i	1,5041 + 3,406(10^{-7})i	3,0097 + 5,906(10^{-7})i	4,731 + 8,099(10^{-7})i	6,5577 + 9,92(10^{-7})i
10^8	0,41214 + 1,056(10^{-9})i	1,5041 + 3,406(10^{-9})i	3,0097 + 5,906(10^{-9})i	4,731 + 8,099(10^{-9})i	6,5577 + 9,92(10^{-9})i
10^{10}	0,41214 + 1,056(10^{-11})i	1,5041 + 3,406(10^{-11})i	3,0097 + 5,906(10^{-11})i	4,731 + 8,099(10^{-11})i	6,5577 + 9,92(10^{-11})i
10^{12}	0,41214 + 1,056(10^{-13})i	1,5041 + 3,406(10^{-13})i	3,0097 + 5,906(10^{-13})i	4,731 + 8,099(10^{-13})i	6,5577 + 9,92(10^{-13})i

Çizelge 4.9. Burulma sönüm elemanının çatlaksız kiriş frekanslarına etkisi

$d_{R1,2}$ $d_{R2,2}$	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
10	0,368205 + 0,192524i	1,47695 + 0,165162i	2,99326 + 0,140292i	4,72017 + 0,118633i	6,55034 + 0,100609i
10^2	0,411738 + 0,0189466i	1,50382 + 0,0165936i	3,00954 + 0,0140933i	4,73094 + 0,011901i	6,55759 + 0,0100798i
10^4	0,412141 + 0,0001894i	1,50409 + 0,0001659i	3,00971 + 0,00014094i	4,73104 + 0,00011901i	6,55766 + 0,0001008i
10^6	0,412141 + 0,0000019i	1,50409 + 0,0000017i	3,00971 + 0,00000141i	4,73104 + 0,00000119i	6,55766 + 0,000001i
10^8	0,41214 + 1,8944(10^{-8})i	1,5041 + 1,6594(10^{-8})i	3,0097 + 1,4094(10^{-8})i	4,731 + 1,19(10^{-8})i	6,5577 + 1,008(10^{-8})i
10^{10}	0,41214 + 1,8944(10^{-10})i	1,5041 + 1,6594(10^{-10})i	3,0097 + 1,4094(10^{-10})i	4,731 + 1,19(10^{-10})i	6,5577 + 1,008(10^{-10})i
10^{12}	0,41214 + 1,8944(10^{-12})i	1,5041 + 1,6594(10^{-12})i	3,0097 + 1,4094(10^{-12})i	4,731 + 1,19(10^{-12})i	6,5577 + 1,008(10^{-12})i
10^{14}	0,41214 + 1,8944(10^{-14})i	1,5041 + 1,6594(10^{-14})i	3,0097 + 1,4094(10^{-14})i	4,731 + 1,19(10^{-14})i	6,5577 + 1,008(10^{-14})i

Çatlaklı kirişler için yapılan analizlerde çatlaksız kirişlerdeki kiriş ve malzeme özellikleri kullanılmış olup, tek bir çatlak olduğu varsayılmış, çatlak özelliklerinin boyutsuz çatlak konumu $e = 0.3$ ve boyutsuz çatlak derinliği $\alpha = 0.5$ kabul edilerek analizler gerçekleştirilmiş ve Çizelge 4.10-Çizelge 4.13'te gösterilmiştir.

Çizelge 4.10. Lineer yayın çatlaklı kiriş frekanslarına etkisi

$d_{1,1}, d_{2,1}$	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
10^{-6}	0,00080064	0,00137141	0,696196	1,76626	3,62881
10^{-4}	0,00800443	0,0137135	0,696366	1,76631	3,62882
10^{-2}	0,0781285	0,136607	0,713356	1,77109	3,63076
1	0,300579	0,981227	1,73029	2,30948	3,84875
10^{2}	0,319241	1,23686	2,92087	4,38782	5,89363
10^{4}	0,31944	1,23961	2,93554	4,43075	5,95007
10^{6}	0,319442	1,23963	2,93568	4,43117	5,95062
10^{8}	0,319442	1,23964	2,93568	4,43117	5,95063
10^{10}	0,319442	1,23964	2,93568	4,43117	5,95063
10^{12}	0,319442	1,23964	2,93568	4,43117	5,95063

Çizelge 4.11. Burulma yayının çatlaklı kiriş frekanslarına etkisi

$d_{R1,1}, d_{R2,1}$	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
10^{-4}	0,00209782	0,696216	1,76627	3,62882	5,45998
10^{-2}	0,0209433	0,698379	1,76763	3,62987	5,46114
1	0,182031	0,863081	1,88418	3,72374	5,56636
10^{2}	0,366173	1,43024	2,51431	4,3466	6,35161
10^{4}	0,371907	1,45705	2,55449	4,39157	6,41274
10^{6}	0,371966	1,45732	2,55492	4,39204	6,41339
10^{8}	0,371966	1,45733	2,55492	4,39204	6,41339
10^{10}	0,371966	1,45733	2,55492	4,39204	6,41339
10^{12}	0,371966	1,45733	2,55492	4,39204	6,41339
10^{14}	0,371966	1,45733	2,55492	4,39204	6,41339

Çizelge 4.12. Lineer sönüm elemanının çatlaklı kiriş frekanslarına etkisi

$d_{1,2}$ $d_{2,2}$	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
10^{-2}	0,695988 + 0,0119517i	1,76617 + 0,0085153i	3,62875 + 0,00707837i	5,45992 + 0,00789363i	6,88666 + 0,00696074i
0,1	0,674979 + 0,118862i	1,75704 + 0,0847102i	3,62375 + 0,0706165i	5,45591 + 0,0788647i	6,88305 + 0,0695137i
0,3	0,452111 + 0,300084i	1,68023 + 0,240627i	3,58245 + 0,207256i	5,42286 + 0,234641i	6,85351 + 0,206127i
1	0,319964 + 0,0648124i	1,30276 + 0,224014i	3,19712 + 0,403536i	5,02612 + 0,619766i	6,52092 + 0,544949i
10^2	0,319442 + 0,0006281i	1,23964 + 0,0022351i	2,93571 + 0,00499814i	4,43123 + 0,00961884i	5,95069 + 0,00929724i
10^4	0,319442 + 0,0000063i	1,23964 + 0,0000224i	2,93568 + 0,00004998i	4,43117 + 0,00009619i	5,95063 + 0,00009297i
10^6	0,31944 + 6,281(10^{-8})i	1,2396 + 2,235(10^{-7})i	2,9357 + 4,998(10^{-7})i	4,4312 + 9,619(10^{-7})i	5,9506 + 9,2974(10^{-7})i
10^8	0,31944 + 6,281(10^{-10})i	1,2396 + 2,235(10^{-9})i	2,9357 + 4,998(10^{-9})i	4,4312 + 9,619(10^{-9})i	5,9506 + 9,2974(10^{-9})i
10^{10}	0,31944 + 6,281(10^{-12})i	1,2396 + 2,235(10^{-11})i	2,9357 + 4,998(10^{-11})i	4,4312 + 9,619(10^{-11})i	5,9506 + 9,2974(10^{-11})i

Çizelge 4.13. Burulma sönüm elemanının çatlaklı kiriş frekanslarına etkisi

$d_{R1,2}$ $d_{R2,2}$	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
1	0,697745 + 0,159359i	1,8085 + 0,247577i	3,77143 + 0,363149i	5,77576 + 0,54673i	7,27342 + 0,570318i
10^2	0,371636 + 0,0159436i	1,4571 + 0,0192694i	2,5547 + 0,0166976i	4,39194 + 0,0109111i	6,41332 + 0,0101755i
10^4	0,371966 + 0,0001594i	1,45733 + 0,0001927i	2,55492 + 0,00016698i	4,39204 + 0,00010912i	6,41339 + 0,00010176i
10^6	0,371966 + 0,0000016i	1,45733 + 0,0000019i	2,55492 + 0,00000167i	4,39204 + 0,00000109i	6,41339 + 0,00000102i
10^8	0,37197 + 1,594(10^{-8})i	1,4573 + 1,927(10^{-8})i	2,5549 + 1,67(10^{-8})i	4,392 + 1,091(10^{-8})i	6,4134 + 1,0176(10^{-8})i
10^{10}	0,37197 + 1,594(10^{-10})i	1,4573 + 1,927(10^{-10})i	2,5549 + 1,67(10^{-10})i	4,392 + 1,091(10^{-10})i	6,4134 + 1,0176(10^{-10})i
10^{12}	0,37197 + 1,594(10^{-12})i	1,4573 + 1,927(10^{-12})i	2,5549 + 1,67(10^{-12})i	4,392 + 1,091(10^{-12})i	6,4134 + 1,0176(10^{-12})i
10^{14}	0,37197 + 1,594(10^{-14})i	1,4573 + 1,927(10^{-14})i	2,5549 + 1,67(10^{-14})i	4,392 + 1,091(10^{-14})i	6,4134 + 1,0176(10^{-14})i

Lineer ve burulma yay katsayılarını içeren boyutsuz ifadeler $d_{1,1} = d_{2,1} = 10^8$'den ve $d_{R1,1} = d_{R2,1} = 10^6$'dan büyük değerleri için çok az değişimler olduğu gözlemlenmiştir. Sönüm elemanlarının etkilerine bakıldığında ise $d_{1,2} = d_{2,2} = 10^8$'den ve $d_{R1,2} = d_{R2,2} = 10^8$'den itibaren değişimler ihmal edilebilecek boyutlardadırlar. Çatlaksız kirişlerdeki sonuçlara benzer olarak kirişin çatlaklı olması durumunda da bu parametrelerin büyük değerleri için sanal kısım sonuçlarının ihmal edilebilecek boyutta sıfıra yakın olduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca düşey yer değiştirme ile çalışan elemanların yüksek değerlerinin sonuçları birbirleri ile aynı çıkarken dönme ile çalışan elemanlarda da büyük değerleri için aynı frekans sonuçları elde edilmiştir.

Şekil 3.7'de gösterilen kirişin uçlarında bulunan yay-kütle-damper sistemindeki elemanların frekans üzerine etkileri Çizelge 4.14 - Çizelge 4.16'da tablolaştırılmıştır. Bu tablolarda da öncekilere benzer olarak her iki uçta da bu sisteme ait parametrelerin aynı değerlerde oldukları varsayılmıştır.

Çizelge 4.14. Yay-kütle-damper sistemindeki kütlenin çatlaklı kiriş frekanslarına etkisi

d_{M1}, d_{M2}	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
10^{-8}	0,24237 + 0,030504i	0,50334 + 0,061785i	1,5004 + 0,082212i	2,5759 + 0,072618i	4,4025 + 0,058532i
10^{-4}	0,24236 + 0,030502i	0,50331 + 0,06178i	1,5003 + 0,082203i	2,5758 + 0,072607i	4,4023 + 0,058523i
1	0,19387 + 0,01954i	0,34228 + 0,036528i	1,0882 + 0,043688i	2,0305 + 0,032357i	3,661 + 0,019954i
30	0,056236 + 0,0015873i	0,078822 + 0,013543i	0,82455 + 0,034161i	1,7652 + 0,024014i	3,3884 + 0,013885i
200	0,022262 + 0,0002477i	0,024744 + 0,005735i	0,812 + 0,034312i	1,754 + 0,023973i	3,3782 + 0,013847i
10^3	0,0099871 + 0,000049825i	0,01019 + 0,0012068i	0,81019 + 0,03434i	1,7524 + 0,023969i	3,3767 + 0,013843i
10^4	0,0031604 + 4,9892(10^{-6})i	0,003170 + 0,00012118i	0,80979 + 0,034346i	1,752 + 0,023969i	3,3764 + 0,013842i

Çizelge 4.14'te kirişin uçlarında bulunan yay-kütle damper sistemindeki kütlenin frekans üzerine etkisi gösterilmiştir. Kütlenin etkisini görebilmek için kiriş ile bağlantı elemanı olarak sadece yay elemanının olduğu varsayılmış ve değer olarak da $d_{01,1} = d_{02,1} = 100$ olduğu kabul edilerek analizler gerçekleştirilmiştir. Kütlenin artması ile genel olarak frekanslarda bir düşüş görülmüş fakat düşük modlardaki frekans değerleri yüksek modlardakilere göre çok daha fazla etkilenmişlerdir. Büyük kütleler için birinci ve ikinci mod sonuçlarının birbirlerine çok yaklaştıkları görülmüştür.

Çizelge 4.15. Kiriş uçlarındaki yay-kütle-damper sistemindeki yayın çatlaklı kiriş frekanslarına etkisi

$d_{01,1}, d_{02,1}$	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
10^{-3}	0,014072 + 9,8625(10^{-7})i	0,014083 + 0,000017014i	0,24352 + 0,03049i	0,50446 + 0,061703i	1,5009 + 0,082208i
1	0,11959 + 0,006884i	0,17695 + 0,016671i	0,67645 + 0,022778i	1,121 + 0,030899i	1,9209 + 0,067226i
50	0,12287 + 0,007701i	0,19018 + 0,020395i	0,88777 + 0,034189i	1,8146 + 0,024228i	3,4063 + 0,013664i
10^2	0,12291 + 0,0077098i	0,19033 + 0,020439i	0,89061 + 0,034457i	1,826 + 0,024731i	3,4456 + 0,014374i
10^4	0,12294 + 0,0077185i	0,19048 + 0,020482i	0,89344 + 0,034727i	1,8372 + 0,025256i	3,4839 + 0,015277i
10^6	0,12294 + 0,0077186i	0,19048 + 0,020483i	0,89347 + 0,03473i	1,8373 + 0,025262i	3,4843 + 0,015287i
10^8	0,12294 + 0,0077186i	0,19048 + 0,020483i	0,89347 + 0,03473i	1,8373 + 0,025262i	3,4843 + 0,015287i

Çizelge 4.15 ve Çizelge 4.16'da kütleyi kirişin ucuna bağlayan yay ve damperin etkileri gösterilmiş olup hesaplamalarda bu parametrelerin etkilerini görmek için $d_{M1} = d_{M2} = 5$ olduğu kabul edilmiştir. Her iki elemanın yüksek değerlerinde sonuçlar benzerlik göstermiştir. Boyutsuz yay katsayıların artması ile sonuçların reel kısımlarında da artış görülmüş ve bu ifadelerin büyük değerlerindeki değişim doğal frekanslar üzerinde

çok ufak değişimlere sebep olmuştur. Bunun nedeni olarak da yayın etkinliğini kaybederek neredeyse rijit bir elemanmış gibi davranması söylenebilmektedir.

Çizelge 4.16. Kiriş uçlarındaki yay-kütle-damper sistemindeki sönüm elemanının çatlaklı kiriş frekanslarına etkisi

$d_{01,2}, d_{02,2}$	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
1	0,11841 + 0,036734i	0,16604 + 0,10603i	0,96091 + 0,41255i	2,2048 + 0,54227i	4,208 + 0,55615i
5	0,1219 + 0,013346i	0,18728 + 0,036259i	0,89166 + 0,098871i	1,8433 + 0,14823i	3,5072 + 0,23386i
10	0,12241 + 0,010534i	0,18895 + 0,028368i	0,8921 + 0,06674i	1,8377 + 0,086748i	3,4887 + 0,12469i
10^2	0,12289 + 0,0080006i	0,19033 + 0,021272i	0,89329 + 0,037936i	1,8371 + 0,031426i	3,4841 + 0,026267i
10^3	0,12294 + 0,0077468i	0,19046 + 0,020562i	0,89345 + 0,03505i	1,8373 + 0,025878i	3,4842 + 0,016386i
10^4	0,12294 + 0,0077214i	0,19048 + 0,020491i	0,89346 + 0,034762i	1,8373 + 0,025323i	3,4843 + 0,015397i
10^5	0,12294 + 0,0077189i	0,19048 + 0,020484i	0,89347 + 0,034733i	1,8373 + 0,025268i	3,4843 + 0,015298i

Çatlaklı kirişlerin doğal frekanslarına çatlak özelliklerinin etkisini incelemek için ise iki kategoride çalışmalar yapılmıştır. Birinci kategori simetrik sınır şartları olduğu durumda $d_{1,1} = d_{2,1} = 0{,}1$, $d_{R1,1} = d_{R2,1} = 0{,}01$, $d_{1,2} = d_{2,2} = 0{,}1$ ve $d_{R1,2} = d_{R2,2} = 100$ olarak kabul edilmiş, ikinci durumda ise $d_{1,1} = 0{,}1$, $d_{2,1} = 0{,}05$, $d_{R1,1} = 0{,}01$, $d_{R2,1} = 0{,}05$, $d_{1,2} = 0{,}1$, $d_{2,2} = 0{,}05$, $d_{R1,2} = 100$ ve $d_{R2,2} = 1000$ olduğu kabul edilmiştir. Malzeme özellikleri ve kiriş boyutları $E = 200$ GPa, $\nu = 0.3$, $\rho = 7850$ kg/m^3, $k = 5/6$, $L = 0.2$ m, $h = 0.03$ m ve $b = 0.015$ m için analiz sonuçları tablolaştırılmıştır.

Çizelge 4.17 ve Çizelge 4.18'de simetrik sınır şartlarına sahip kiriş durumunda, üç farklı çatlak derinliği için çatlak konumunun değişimi gösterilmiştir. Doğal frekans değerlerinin

çatlak konumu ile simetrik olarak değişiminden söz edilebilmektedir. Yani, çatlağın e konumunda veya $(1-e)$ konumunda bulunması sonucunda elde edilen frekans değerleri benzerdir. Çatlak derinliği arttıkça da bu davranış değişmemektedir.

Çizelge 4.17. Simetrik sınır şartlarında, α = 0,3-0,5-0,7 ve e = 0,2-0,4-0,6-0,8 değerleri için frekans değerleri

α	e	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
0,3	0,2	0,2431 + 0,030382i	0,5171 + 0,064975i	1,5297 + 0,074467i	3,0017 + 0,078465i	4,5324 + 0,076979i
	0,4	0,24239 + 0,030333i	0,53651 + 0,06724i	1,4531 + 0,076752i	2,8888 + 0,069833i	4,7036 + 0,072716i
	0,6	0,24239 + 0,030333i	0,53651 + 0,06724i	1,4531 + 0,076752i	2,8888 + 0,069833i	4,7036 + 0,072716i
	0,8	0,2431 + 0,030382i	0,5171 + 0,064975i	1,5297 + 0,074467i	3,0017 + 0,078465i	4,5324 + 0,076979i
0,5	0,2	0,24307 + 0,030319i	0,48467 + 0,061336i	1,5066 + 0,070916i	2,937 + 0,084636i	4,2529 + 0,078887i
	0,4	0,24114 + 0,030242i	0,52788 + 0,065533i	1,3212 + 0,075944i	2,733 + 0,066633i	4,6072 + 0,073461i
	0,6	0,24114 + 0,030242i	0,52788 + 0,065533i	1,3212 + 0,075944i	2,733 + 0,066633i	4,6072 + 0,073461i
	0,8	0,24307 + 0,030319i	0,48467 + 0,061336i	1,5066 + 0,070916i	2,937 + 0,084636i	4,2529 + 0,078887i
0,7	0,2	0,24295 + 0,030195i	0,45204 + 0,0587i	1,4765 + 0,068299i	2,8124 + 0,088451i	4,021 + 0,074206i
	0,4	0,23929 + 0,030196i	0,51496 + 0,063332i	1,1838 + 0,076334i	2,6002 + 0,06477i	4,4047 + 0,0693i
	0,6	0,23929 + 0,030196i	0,51496 + 0,063332i	1,1838 + 0,076334i	2,6002 + 0,06477i	4,4047 + 0,0693i
	0,8	0,24295 + 0,030195i	0,45204 + 0,0587i	1,4765 + 0,068299i	2,8124 + 0,088451i	4,021 + 0,074206i

Çizelge 4.18. Simetrik sınır şartlarında, α = 0,3-0,5-0,7 ve e = 0,1-0,3-0,5-0,7-0,9 değerleri için frekans değerleri

α	e	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
0,3	0,1	0,24255 + 0,029866i	0,51413 + 0,066917i	1,4687 + 0,073525i	2,9613 + 0,067304i	4,709 + 0,065714i
	0,3	0,24283 + 0,03044i	0,52633 + 0,06549i	1,5298 + 0,079527i	2,8246 + 0,073824i	4,5709 + 0,063592i
	0,5	0,2422 + 0,030273i	0,54102 + 0,068208i	1,4109 + 0,07368i	3,0232 + 0,073675i	4,4662 + 0,070357i
	0,7	0,24283 + 0,03044i	0,52633 + 0,06549i	1,5298 + 0,079527i	2,8246 + 0,073824i	4,5709 + 0,063592i
	0,9	0,24255 + 0,029866i	0,51413 + 0,066917i	1,4687 + 0,073525i	2,9613 + 0,067304i	4,709 + 0,065714i
0,5	0,1	0,24162 + 0,029071i	0,48121 + 0,066028i	1,3945 + 0,07046i	2,8933 + 0,063487i	4,64 + 0,064162i
	0,3	0,24237 + 0,030504i	0,50334 + 0,061785i	1,5004 + 0,082212i	2,5759 + 0,072618i	4,4025 + 0,058532i
	0,5	0,24059 + 0,030088i	0,54028 + 0,068044i	1,236 + 0,069763i	2,9923 + 0,072473i	4,181 + 0,071046i
	0,7	0,24237 + 0,030504i	0,50334 + 0,061785i	1,5004 + 0,082212i	2,5759 + 0,072618i	4,4025 + 0,058532i
	0,9	0,24162 + 0,029071i	0,48121 + 0,066028i	1,3945 + 0,07046i	2,8933 + 0,063487i	4,64 + 0,064162i
0,7	0,1	0,24035 + 0,028194i	0,45181 + 0,066016i	1,3393 + 0,06943i	2,8249 + 0,063789i	4,4804 + 0,069432i
	0,3	0,24168 + 0,030608i	0,47609 + 0,058314i	1,4524 + 0,084621i	2,3709 + 0,071265i	4,2416 + 0,056066i
	0,5	0,23821 + 0,029936i	0,53837 + 0,067619i	1,0663 + 0,067958i	2,9095 + 0,069051i	3,9761 + 0,072516i
	0,7	0,24168 + 0,030608i	0,47609 + 0,058314i	1,4524 + 0,084621i	2,3709 + 0,071265i	4,2416 + 0,056066i
	0,9	0,24035 + 0,028194i	0,45181 + 0,066016i	1,3393 + 0,06943i	2,8249 + 0,063789i	4,4804 + 0,069432i

Çizelge 4.19. Simetrik sınır şartlarında, e = 0,2 ve α = 0,1-0,3-0,5-0,7-0,9 değerleri için frekans değerleri

e	α	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
0,2	0,1	0,24309 + 0,030403i	0,53774 + 0,067748i	1,5424 + 0,077188i	3,026 + 0,074536i	4,7145 + 0,071884i
	0,3	0,2431 + 0,030382i	0,5171 + 0,064975i	1,5297 + 0,074467i	3,0017 + 0,078465i	4,5324 + 0,076979i
	0,5	0,24307 + 0,030319i	0,48467 + 0,061336i	1,5066 + 0,070916i	2,937 + 0,084636i	4,2529 + 0,078887i
	0,7	0,24295 + 0,030195i	0,45204 + 0,0587i	1,4765 + 0,068299i	2,8124 + 0,088451i	4,021 + 0,074206i
	0,9	0,24255 + 0,029956i	0,43208 + 0,057714i	1,43 + 0,067478i	2,5803 + 0,079516i	3,8958 + 0,06504i

Çizelge 4.20. Simetrik sınır şartlarında, e = 0,5 ve α = 0,1-0,3-0,5-0,7-0,9 değerleri için frekans değerleri

e	α	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
0,5	0,1	0,24297 + 0,030387i	0,54117 + 0,068239i	1,5252 + 0,077058i	3,029 + 0,073895i	4,7003 + 0,070684i
	0,3	0,2422 + 0,030273i	0,54102 + 0,068208i	1,4109 + 0,07368i	3,0232 + 0,073675i	4,4662 + 0,070357i
	0,5	0,24059 + 0,030088i	0,54028 + 0,068044i	1,236 + 0,069763i	2,9923 + 0,072473i	4,181 + 0,071046i
	0,7	0,23821 + 0,029936i	0,53837 + 0,067619i	1,0663 + 0,067958i	2,9095 + 0,069051i	3,9761 + 0,072516i
	0,9	0,23611 + 0,029928i	0,53351 + 0,066538i	0,96502 + 0,068168i	2,6906 + 0,059541i	3,8803 + 0,073528i

Çizelge 4.19-Çizelge 4.24'te simetrik sınır şartlarına sahip kiriş için, çatlak derinliğinin değişiminin etkisi incelenmiştir. Farklı çatlak konumları için, çatlak derinlikleri değiştirilerek analizler gerçekleştirilmiş ve tablolaştırılmıştır. Çatlak derinliğinin (α) artması ile elde edilen frekans değerlerinin reel kısımlarının düştüğü gözlemlenmiştir.

Bunun sebebi, çatlak derinliğinin artması ile kiriş katılığının yerel olarak düşmesi olarak söylenebilir.

Çizelge 4.21. Simetrik sınır şartlarında, e = 0,8 ve α = 0,1-0,3-0,5-0,7-0,9 değerleri için frekans değerleri

e	α	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
0,8	0,1	0,24309 + 0,030403i	0,53774 + 0,067748i	1,5424 + 0,077188i	3,026 + 0,074536i	4,7145 + 0,071884i
	0,3	0,2431 + 0,030382i	0,5171 + 0,064975i	1,5297 + 0,074467i	3,0017 + 0,078465i	4,5324 + 0,076979i
	0,5	0,24307 + 0,030319i	0,48467 + 0,061336i	1,5066 + 0,070916i	2,937 + 0,084636i	4,2529 + 0,078887i
	0,7	0,24295 + 0,030195i	0,45204 + 0,0587i	1,4765 + 0,068299i	2,8124 + 0,088451i	4,021 + 0,074206i
	0,9	0,24255 + 0,029956i	0,43208 + 0,057714i	1,43 + 0,067478i	2,5803 + 0,079516i	3,8958 + 0,06504i

Çizelge 4.22. Simetrik sınır şartlarında, e = 0,2 ve α = 0,2-0,4-0,6-0,8 değerleri için frekans değerleri

e	α	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
0,2	0,2	0,2431 + 0,030396i	0,52922 + 0,066563i	1,5373 + 0,076023i	3,0173 + 0,076141i	4,6408 + 0,074317i
	0,4	0,24309 + 0,030358i	0,50193 + 0,063158i	1,5194 + 0,072694i	2,9761 + 0,081402i	4,3973 + 0,07879i
	0,6	0,24303 + 0,030265i	0,46732 + 0,059795i	1,4921 + 0,069396i	2,8823 + 0,087342i	4,1225 + 0,077146i
	0,8	0,24284 + 0,030112i	0,4401 + 0,058034i	1,46 + 0,067633i	2,7297 + 0,087258i	3,9493 + 0,070817i

Çizelge 4.23. Simetrik sınır şartlarında, e = 0,5 ve α = 0,2-0,4-0,6-0,8 değerleri için frekans değerleri

e	α	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
0,5	0,2	0,24267 + 0,030341i	0,54114 + 0,068233i	1,4778 + 0,075592i	3,0277 + 0,073848i	4,5985 + 0,070464i
	0,4	0,24152 + 0,030186i	0,54077 + 0,068151i	1,3283 + 0,071613i	3,0125 + 0,073265i	4,321 + 0,070532i
	0,6	0,23945 + 0,029997i	0,5395 + 0,06787i	1,1451 + 0,068505i	2,9589 + 0,071123i	4,0636 + 0,071778i
	0,8	0,23703 + 0,029917i	0,53686 + 0,067286i	1,0055 + 0,067945i	2,8423 + 0,06614i	3,9165 + 0,07312i

Çizelge 4.24. Simetrik sınır şartlarında, e = 0,8 ve α = 0,2-0,4-0,6-0,8 değerleri için frekans değerleri

e	α	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
0,8	0,2	0,2431 + 0,030396i	0,52922 + 0,066563i	1,5373 + 0,076023i	3,0173 + 0,076141i	4,6408 + 0,074317i
	0,4	0,24309 + 0,030358i	0,50193 + 0,063158i	1,5194 + 0,072694i	2,9761 + 0,081402i	4,3973 + 0,07879i
	0,6	0,24303 + 0,030265i	0,46732 + 0,059795i	1,4921 + 0,069396i	2,8823 + 0,087342i	4,1225 + 0,077146i
	0,8	0,24284 + 0,030112i	0,4401 + 0,058034i	1,46 + 0,067633i	2,7297 + 0,087258i	3,9493 + 0,070817i

Çizelge 4.25 – Çizelge 4.32'de sınır şartları simetrik olmayan kiriş için çatlak özelliklerinin doğal frekans üzerine etkileri gösterilmiştir.

Çizelge 4.25 ve Çizelge 4.26'da çatlak konumunun etkileri gösterilmiştir. Belirli çatlak derinlikleri için farklı çatlak konumlarında elde edilen doğal frekans değerleri tablolaştırılmıştır. Simetrik sınır şartları için elde edilen frekans değerlerinde çatlak konumuna göre bir simetrik davranış olduğundan bahsedilmişti. Bu davranış simetrik olmayan sınır şartlarında gözlemlenmemiştir.

Çizelge 4.25. Simetrik olmayan sınır şartlarında, α = 0,3-0,5-0,7 ve e = 0,2-0,4-0,6-0,8 değerleri için frekans değerleri

α	e	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
0,3	0,2	0,20716 + 0,022138i	0,48963 + 0,048865i	1,5191 + 0,051341i	2,9971 + 0,058463i	4,5294 + 0,058986i
	0,4	0,20743 + 0,022595i	0,50818 + 0,049464i	1,4438 + 0,057913i	2,8829 + 0,045558i	4,7011 + 0,055052i
	0,6	0,20683 + 0,022447i	0,51032 + 0,051556i	1,4411 + 0,051166i	2,885 + 0,053838i	4,7 + 0,049142i
	0,8	0,2072 + 0,022524i	0,48934 + 0,049777i	1,5202 + 0,055075i	2,9957 + 0,053074i	4,5288 + 0,050575i
0,5	0,2	0,20633 + 0,021446i	0,45699 + 0,046382i	1,4955 + 0,046954i	2,933 + 0,066701i	4,2497 + 0,062066i
	0,4	0,20711 + 0,022662i	0,49773 + 0,046404i	1,3134 + 0,061427i	2,7259 + 0,039158i	4,6051 + 0,058452i
	0,6	0,20545 + 0,022278i	0,50366 + 0,051972i	1,3066 + 0,045925i	2,7303 + 0,055542i	4,6029 + 0,046784i
	0,8	0,20651 + 0,022475i	0,4563 + 0,047947i	1,4979 + 0,054677i	2,9294 + 0,053157i	4,2492 + 0,049216i
0,7	0,2	0,20508 + 0,020564i	0,42419 + 0,044966i	1,4651 + 0,043973i	2,8088 + 0,073018i	4,0174 + 0,056415i
	0,4	0,20659 + 0,022765i	0,48217 + 0,042462i	1,1773 + 0,065504i	2,5923 + 0,035566i	4,4028 + 0,055712i
	0,6	0,20344 + 0,02209i	0,49352 + 0,052464i	1,1658 + 0,041657i	2,5982 + 0,056354i	4,4003 + 0,043475i
	0,8	0,20555 + 0,022424i	0,42301 + 0,046356i	1,4683 + 0,054135i	2,8033 + 0,051858i	4,0179 + 0,047631i

Çizelge 4.26. Simetrik olmayan sınır şartlarında, α = 0,3-0,5-0,7 ve e = 0,1-0,3-0,5-0,7-0,9 değerleri için frekans değerleri

α	e	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
0,3	0,1	0,20559 + 0,02127i	0,48795 + 0,051684i	1,4578 + 0,051031i	2,9561 + 0,045506i	4,7059 + 0,045236i
	0,3	0,20762 + 0,022528i	0,49797 + 0,048249i	1,5203 + 0,058652i	2,8195 + 0,054258i	4,5673 + 0,041128i
	0,5	0,20706 + 0,02252i	0,51368 + 0,051099i	1,4004 + 0,052412i	3,0183 + 0,052457i	4,4629 + 0,050448i
	0,7	0,20689 + 0,02245i	0,50024 + 0,050714i	1,5184 + 0,054397i	2,8193 + 0,050551i	4,5687 + 0,049747i
	0,9	0,20755 + 0,022576i	0,48289 + 0,049961i	1,4588 + 0,054845i	2,957 + 0,051085i	4,7061 + 0,049303i
0,5	0,1	0,20235 + 0,019519i	0,45662 + 0,052842i	1,3826 + 0,047532i	2,888 + 0,041352i	4,6369 + 0,043811i
	0,3	0,2076 + 0,022462i	0,47329 + 0,044196i	1,4922 + 0,063738i	2,5703 + 0,053539i	4,3986 + 0,034337i
	0,5	0,20608 + 0,02247i	0,51289 + 0,050685i	1,2249 + 0,049463i	2,9876 + 0,051528i	4,1774 + 0,050994i
	0,7	0,20563 + 0,022286i	0,47915 + 0,049896i	1,487 + 0,052588i	2,5706 + 0,049015i	4,4011 + 0,049092i
	0,9	0,20742 + 0,0226i	0,44466 + 0,048504i	1,3849 + 0,054672i	2,8894 + 0,05021i	4,637 + 0,048868i
0,7	0,1	0,19836 + 0,017843i	0,42891 + 0,054544i	1,3266 + 0,046108i	2,8195 + 0,041927i	4,4776 + 0,050755i
	0,3	0,20751 + 0,022341i	0,44389 + 0,04045i	1,4456 + 0,069147i	2,3643 + 0,051035i	4,2376 + 0,032228i
	0,5	0,20461 + 0,022437i	0,5109 + 0,049913i	1,0542 + 0,048029i	2,9049 + 0,049009i	3,9722 + 0,052083i
	0,7	0,20386 + 0,0221i	0,45415 + 0,049055i	1,4366 + 0,049959i	2,366 + 0,049171i	4,2403 + 0,047459i
	0,9	0,20721 + 0,022611i	0,40987 + 0,047364i	1,3299 + 0,054917i	2,8207 + 0,0504i	4,4766 + 0,05i

Çizelge 4.27 – Çizelge 4.32'de simetrik olmayan sınır şartlarına sahip kiriş için, çatlak derinliğinin farklı konumlardaki etkileri gösterilmiştir. Simetrik sınır şartlarına benzer olarak bu durumda da çatlak derinliğinin artması ile frekans değerlerinin reel kısımlarında azalma olduğundan bahsedilebilmektedir.

Çizelge 4.27. Simetrik olmayan sınır şartlarında, e = 0,2 ve α = 0,1-0,3-0,5-0,7-0,9 değerleri için frekans değerleri

e	α	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
0,2	0,1	0,20755 + 0,022501i	0,5104 + 0,05091i	1,5321 + 0,054752i	3,0211 + 0,053463i	4,7115 + 0,052138i
	0,3	0,20716 + 0,022138i	0,48963 + 0,048865i	1,5191 + 0,051341i	2,9971 + 0,058463i	4,5294 + 0,058986i
	0,5	0,20633 + 0,021446i	0,45699 + 0,046382i	1,4955 + 0,046954i	2,933 + 0,066701i	4,2497 + 0,062066i
	0,7	0,20508 + 0,020564i	0,42419 + 0,044966i	1,4651 + 0,043973i	2,8088 + 0,073018i	4,0174 + 0,056415i
	0,9	0,20375 + 0,019833i	0,40422 + 0,044754i	1,4189 + 0,044324i	2,5765 + 0,065463i	3,892 + 0,044895i

Çizelge 4.28. Simetrik olmayan sınır şartlarında, e = 0,5 ve α = 0,1-0,3-0,5-0,7-0,9 değerleri için frekans değerleri

e	α	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
0,5	0,1	0,20754 + 0,022551i	0,51385 + 0,05126i	1,5149 + 0,05491i	3,024 + 0,052655i	4,6972 + 0,050648i
	0,3	0,20706 + 0,02252i	0,51368 + 0,051099i	1,4004 + 0,052412i	3,0183 + 0,052457i	4,4629 + 0,050448i
	0,5	0,20608 + 0,02247i	0,51289 + 0,050685i	1,2249 + 0,049463i	2,9876 + 0,051528i	4,1774 + 0,050994i
	0,7	0,20461 + 0,022437i	0,5109 + 0,049913i	1,0542 + 0,048029i	2,9049 + 0,049009i	3,9722 + 0,052083i
	0,9	0,20328 + 0,022435i	0,506 + 0,048744i	0,95192 + 0,048113i	2,6863 + 0,042152i	3,8763 + 0,052764i

Çizelge 4.29. Simetrik olmayan sınır şartlarında, e = 0,8 ve α = 0,1-0,3-0,5-0,7-0,9 değerleri için frekans değerleri

e	α	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
0,8	0,1	0,20755 + 0,022552i	0,51036 + 0,05106i	1,5323 + 0,055321i	3,0209 + 0,052735i	4,7113 + 0,050776i
	0,3	0,2072 + 0,022524i	0,48934 + 0,049777i	1,5202 + 0,055075i	2,9957 + 0,053074i	4,5288 + 0,050575i
	0,5	0,20651 + 0,022475i	0,4563 + 0,047947i	1,4979 + 0,054677i	2,9294 + 0,053157i	4,2492 + 0,049216i
	0,7	0,20555 + 0,022424i	0,42301 + 0,046356i	1,4683 + 0,054135i	2,8033 + 0,051858i	4,0179 + 0,047631i
	0,9	0,2047 + 0,02237i	0,40247 + 0,045506i	1,4212 + 0,052794i	2,5716 + 0,047044i	3,8931 + 0,046332i

Çizelge 4.30. Simetrik olmayan sınır şartlarında, e = 0,2 ve α = 0,2-0,4-0,6-0,8 değerleri için frekans değerleri

e	α	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
0,2	0,2	0,2074 + 0,022358i	0,50183 + 0,050025i	1,5269 + 0,053288i	3,0125 + 0,055488i	4,6378 + 0,055359i
	0,4	0,20681 + 0,021834i	0,47436 + 0,047584i	1,5085 + 0,049135i	2,9718 + 0,062308i	4,3943 + 0,061623i
	0,6	0,20573 + 0,021004i	0,43954 + 0,045479i	1,4808 + 0,045151i	2,8786 + 0,070699i	4,1191 + 0,060061i
	0,8	0,20444 + 0,020177i	0,41221 + 0,044767i	1,4486 + 0,043479i	2,7262 + 0,072757i	3,9456 + 0,052134i

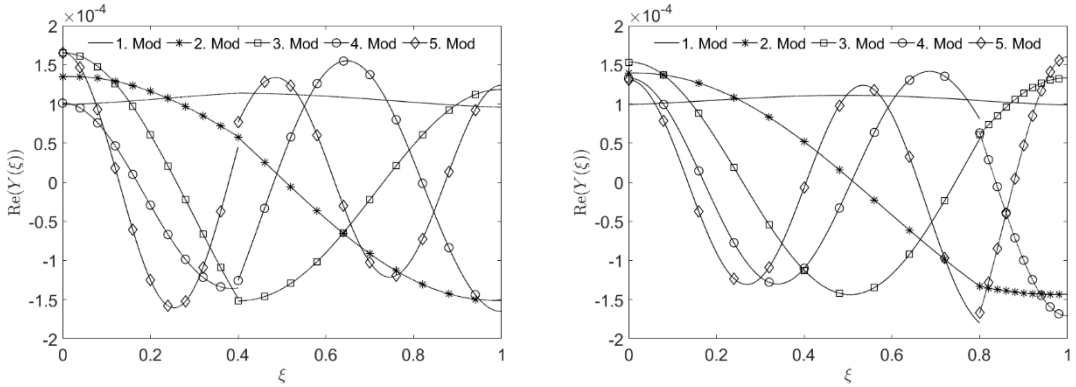
Çizelge 4.31. Simetrik olmayan sınır şartlarında, e = 0,5 ve α = 0,2-0,4-0,6-0,8 değerleri için frekans değerleri

e	α	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
0,5	0,2	0,20735 + 0,022539i	0,51381 + 0,051202i	1,4674 + 0,053829i	3,0228 + 0,052605i	4,5953 + 0,050505i
	0,4	0,20665 + 0,022496i	0,5134 + 0,050934i	1,3175 + 0,050867i	3,0077 + 0,052132i	4,3175 + 0,050598i
	0,6	0,20538 + 0,022449i	0,51207 + 0,050341i	1,1335 + 0,048482i	2,9543 + 0,050525i	4,0597 + 0,051542i
	0,8	0,20388 + 0,022438i	0,50936 + 0,049432i	0,9928 + 0,047985i	2,8378 + 0,0469i	3,9125 + 0,052514i

Çizelge 4.32. Simetrik olmayan sınır şartlarında, e = 0,8 ve α = 0,2-0,4-0,6-0,8 değerleri için frekans değerleri

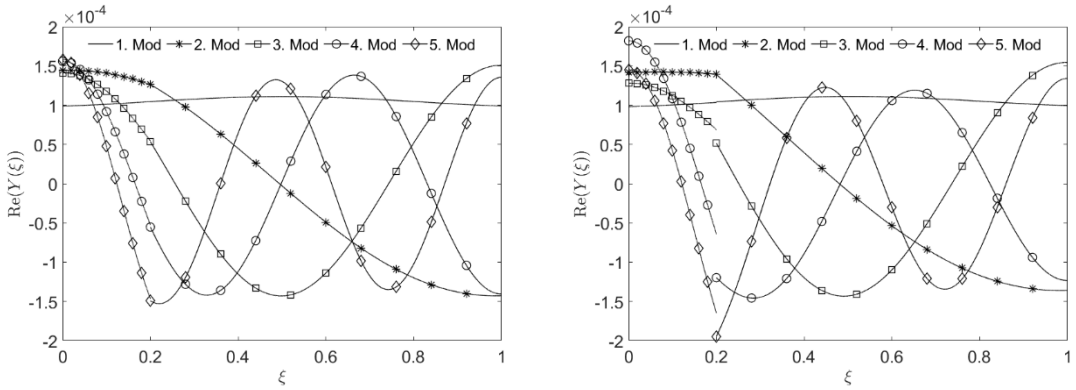
e	α	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
0,8	0,2	0,20742 + 0,02254i	0,50168 + 0,05052i	1,5275 + 0,05522i	3,0118 + 0,052894i	4,6374 + 0,050789i
	0,4	0,2069 + 0,022501i	0,47388 + 0,048892i	1,5103 + 0,054892i	2,9694 + 0,053202i	4,3936 + 0,050026i
	0,6	0,20604 + 0,022448i	0,4386 + 0,047068i	1,4837 + 0,054431i	2,8738 + 0,052761i	4,1191 + 0,048362i
	0,8	0,2051 + 0,022403i	0,4108 + 0,04584i	1,4518 + 0,053755i	2,7203 + 0,050403i	3,9464 + 0,04706i

Çatlaklı kirişlerin mod şekillerinin bulunması için elde edilen denklemlerin uygulamaları Şekil 4.1 - Şekil 4.3'de gösterilmiştir. Çizelge 4.17'deki sınır şartları ve elde edilen frekans değerleri kullanılarak, $\alpha = 0{,}5$ ve $e = 0{,}4 - 0{,}8$ ile $e = 0{,}2$ ve $\alpha = 0{,}3 - 0{,}7$ için elde edilen mod şekilleri Şekil 4.1 ve Şekil 4.2'de gösterilmiştir. Çatlak derinliğinin artması ile çatlak konumundaki süreksizliğin arttığı görülmekte bu da çatlak için tanımlanan şartlar göz önüne alındığında (Denklem 3.86) normal karşılanabilmektedir.



(a) (b)

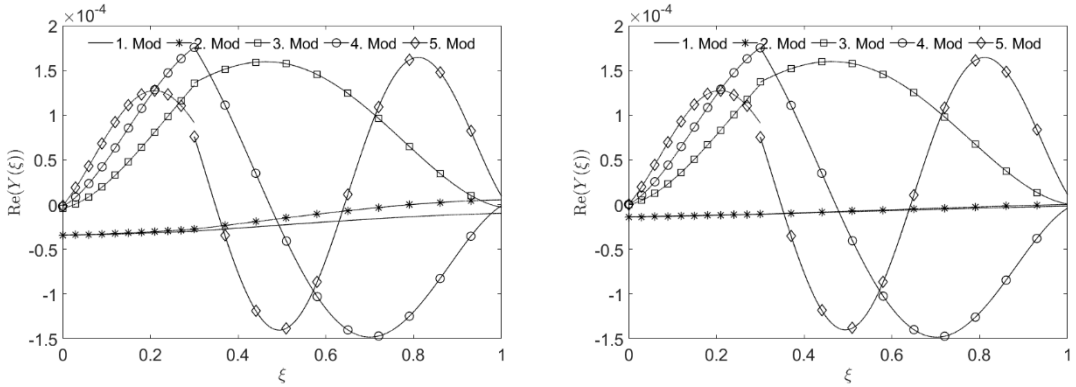
Şekil 4.1. $d_{1,1} = d_{2,1} = 0{,}1$, $d_{R1,1} = d_{R2,1} = 0{,}01$, $d_{1,2} = d_{2,2} = 0{,}1$ ve $d_{R1,2} = d_{R2,2} = 100$ sınır şartları için mod şekilleri. a) $e = 0{,}4$ ve $\alpha = 0{,}5$ için mod şekilleri b) $e = 0{,}8$ ve $\alpha = 0{,}5$ için mod şekilleri.



(a) (b)

Şekil 4.2. $d_{1,1} = d_{2,1} = 0{,}1$, $d_{R1,1} = d_{R2,1} = 0{,}01$, $d_{1,2} = d_{2,2} = 0{,}1$ ve $d_{R1,2} = d_{R2,2} = 100$ sınır şartları için mod şekilleri. a) $e = 0{,}2$ ve $\alpha = 0{,}3$ için mod şekilleri b) $e = 0{,}2$ ve $\alpha = 0{,}7$ için mod şekilleri.

Şu ana kadarki belirtilen mod şekilleri kiriş uçlarındaki yay-kütle-damper sisteminin olmadığı durumlar için çizdirilmiş olup bu sistemin de bulunması halinde oluşacak mod şekillerine örnek olarak bazı durumlar, Çizelge 4.14'teki frekansların elde edilmesi için kullanılan sınır şartları ve çatlak parametreleri ile $d_{M1} = d_{M2} = 30, d_{M1} = d_{M2} = 200$ olduğu durumlarda Şekil 4.3'te gösterilmiştir.



Şekil 4.3. $d_{1,1} = d_{2,1} = 0{,}1$, $d_{R1,1} = d_{R2,1} = 0{,}01$, $d_{1,2} = d_{2,2} = 0{,}1$ ve $d_{R1,2} = d_{R2,2} = 100$ sınır şartları, $e = 0{,}3$, $\alpha = 0{,}5$ ve $d_{011} = d_{021} = 100$ için mod şekilleri. a) $d_{M1} = d_{M2} = 30$ için mod şekilleri b) $d_{M1} = d_{M2} = 200$ için mod şekilleri.

5. SONUÇ

Bu çalışmada çubukların boyuna ve kirişlerin yanal titreşimleri üzerine çalışılmıştır. Birinci kısımda çubukların boyuna titreşimleri incelenirken, ikinci kısım çalışması olarak çatlaklı Timoshenko kirişlerin yanal titreşimleri incelenmiştir.

Çubukların boyuna titreşimleri için daha önceki yıllarda geliştirilen Riccati diferansiyel denkleminin çözümüne dayanan bir yöntem ortaya konulmuştur. Önerilen bu yöntemde değişken kesitli çubuklar için yazılan diferansiyel denklemin bir dönüşüm denklemi kullanılarak Riccati diferansiyel denklemi şeklinde ifade edilebildiği gösterilmiştir. Bu denklemin çözümü esnasında ikinci mertebeden bir diferansiyel denklemin çözülmesi gerekmektedir. Kesit alanına bağlı olarak da bu denklem sabit katsayılı veya değişken katsayılı olabilmektedir. Elde edilen bu denklem, çözülebilen formları göz önüne alınırsa analitik veya sayısal olarak çözüm elde edilebilecek kesit tiplerinin de belirlenebilmesine imkân sağlamaktadır. Çözüm yönteminin uygulanabilirliğini göstermek için polinom, üstel, trigonometrik veya hiperbolik fonksiyonlar cinsinden yazılabilen bazı kesit tipleri için çözümler yapılmış ayrıca kademeli çubuklara uygulanabilirliği de çift kademeli bir çubuk örneğinde gösterilmiştir.

Çalışmanın ikinci kısmında, uçlarında yay kütle damper sistemi bulunan ve şekil değiştirebilen sınır şartlarına sahip çatlaklı Timoshenko kirişlerin doğal frekans ve mod şekilleri için denklemler elde edilmiştir. Kirişin tek taraflı keyfi sayıda çatlak içerdiği ve çatlak noktalarından ayrılan kiriş parçaları kütlesiz ve boyutsuz yaylar ile birbirlerine bağlı olduğu varsayılarak modellenmiş ve transfer matris yöntemi kullanılarak kiriş için doğal frekanslar elde edilmiştir. Simetrik sınır şartlarına sahip kiriş için doğal frekansların kiriş üzerinde bulunan çatlağın konumu ile değiştiği, bu değişimin de simetrik olabildiği gözlemlenmiştir. Yani çatlağın e veya $(1-e)$ konumunda bulunması durumlarında frekans değerleri benzerlik göstermektedir. Simetrik olmayan sınır şartları için ise böyle bir davranıştan söz edilememektedir. Çatlak derinliğinin artmasının elde edilen frekans değerlerinin reel kısımlarının azalmasına sebep olduğundan bahsedilebilmektedir. İlaveten kiriş uçlarında bulunan kütle yay sistemindeki kütlenin artmasının da

frekanslarda düşüşe sebep olduğu ve düşük modlardaki değerlerin daha fazla etkilendiği görülmüştür.

KAYNAKLAR

Abrate, S. (1995). Vibration of non-uniform rods and beams. *Journal of Sound and Vibration*, *185*(4), 703–716. https://doi.org/10.1006/JSVI.1995.0410

Al Kaisy, A. M. A., Esmaeel, R. A., & Nassar, M. M. (2007). Application of the differential quadrature method to the longitudinal vibration of non-uniform rods. *Engineering Mechanics*, *14*(5), 303–310.

Arndt, M., Machado, R. D., & Scremin, A. (2010). An adaptive generalized finite element method applied to free vibration analysis of straight bars and trusses. *Journal of Sound and Vibration*, 329(6), 659–672. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.09.036

Aydin, K. (2007). Vibratory Characteristics of Axially-Loaded Timoshenko Beams With Arbitrary Number of Cracks. *Journal of Vibration and Acoustics*, 129(3), 341–354. https://doi.org/10.1115/1.2731411

Bapat, C. N. (1995). Vibration of rods with uniformly tapered sections. *Journal of Sound and Vibration*, 185(1), 185–189. https://doi.org/10.1006/JSVI.1995.0371

Caliò, I., & Elishakoff, I. (2008). Vibration tailoring of inhomogeneous rod that possesses a trigonometric fundamental mode shape. *Journal of Sound And Vıbratıon*, *309*, 838–842. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.06.079

Chen, B., Zhao, X., Li, Y. H., & Guo, Y. (2019). Forced vibration analysis of multi-cracked Timoshenko beam with the inclusion of damping by virtue of Green's functions. *Applied Acoustics*, *155*, 477–491. https://doi.org/10.1016/J.APACOUST.2019.06.016

Chouiyakh, H., Azrar, L., Alnefaie, K., & Akourri, O. (2017). Vibration and multi-crack identification of Timoshenko beams under moving mass using the differential quadrature method. *International Journal of Mechanical Sciences*, *120*, 1–11. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.11.014

De Rosa, M. A., & Lippiello, M. (2021). Closed-form solutions for vibrations analysis of cracked Timoshenko beams on elastic medium: An analytically approach. *Engineering Structures*, *236*, 111946. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.111946

Eisenberger, M. (1991). Exact longitudinal vibration frequencies of a variable cross-section rod. *Applied Acoustics*, 34(2), 123–130. https://doi.org/10.1016/0003-682X(91)90027-C

Ghannadiasl, A., & Khodapanah Ajirlou, S. (2022). Dynamic analysis of multiple cracked Timoshenko beam under moving load–analytical method. *Journal of Vibration and Control*, *28*(3–4), 379–395. https://doi.org/10.1177/1077546320977596

Guo, S., & Yang, S. (2015). Longitudinal vibrations of arbitrary non-uniform rods. *Acta Mechanica Solida Sinica*, *28*(2), 187–199. https://doi.org/10.1016/S0894-

9166(15)30007-0

Guo, S., & Yang, S. (2011). Free longitudinal vibrations of non-uniform rods. Science *China Technological Sciences*, *54*(10), 2735–2745. https://doi.org/10.1007/s11431-011-4534-6

Khaji, N., Shafiei, M., & Jalalpour, M. (2009). Closed-form solutions for crack detection problem of Timoshenko beams with various boundary conditions. *International Journal of Mechanical Sciences*, *51*(9–10), 667–681. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2009.07.004

Kim, K., Kim, S., Sok, K., Pak, C., & Han, K. (2018). A modeling method for vibration analysis of cracked beam with arbitrary boundary condition. *Journal of Ocean Engineering and Science*, *3*(4) , 367–381. https://doi.org/10.1016/j.joes.2018.11.003

Kumar, B. M., & Sujith, R. I. (1997). Exact solutions for the longitudinal vibration of non-uniform rods. *Journal of Sound and Vibration*, *207*(5), 721–729. https://doi.org/10.1006/JSVI.1997.1146

Li, Q. S. (2000). Exact solutions for free longitudinal vibration of stepped non-uniform rods. *Applied Acoustics*, 60(1), 13–28. https://doi.org/10.1016/S0003-682X(99)00048-1

Lin, H.-P. (2004). Direct and inverse methods on free vibration analysis of simply supported beams with a crack. *Engineering Structures*, 26(4), 427–436. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2003.10.014

Loya, J. A., Aranda-Ruiz, J., & Zaera, R. (2022). Natural frequencies of vibration in cracked Timoshenko beams within an elastic medium. T*heoretical and Applied Fracture Mechanics*, *118*, 103257. https://doi.org/10.1016/J.TAFMEC.2022.103257

Loya, J. A., Rubio, L., & Fernández-Sáez, J. (2006). Natural frequencies for bending vibrations of Timoshenko cracked beams. *Journal of Sound and Vibration*, *290*(3–5), 640–653. https://doi.org/10.1016/J.JSV.2005.04.005

Pala, Y., & Ertas, O. (2017). A New Analytical Method for Solving General Riccati Equation. Universal *Journal of Applied Mathematics*, *5*(2), 11–16. https://doi.org/10.13189/ujam.2017.050201

Pillutla, S. H., Gopinathan, S., & Yerikalapudy, V. R. (2018). Free longitudinal vibrations of functionally graded tapered axial bars by pseudospectral method. *Journal of Vibroengineering*, *20*(5), 2137–2150. https://doi.org/10.21595/jve.2018.19373

Raman, V. M. (1983). On analytical solutions of vibrations of rods with variable cross sections. *Applied Mathematical Modelling*, *7*(5), 356–361. https://doi.org/10.1016/0307-904X(83)90134-8

Rao, S. S. 2011. *Mechanical Vibrations Fifth Edition*. Pearson Education, Inc.

Sarvestan, V., Mirdamadi, H. R., & Ghayour, M. (2017). Vibration analysis of cracked Timoshenko beam under moving load with constant velocity and acceleration by spectral finite element method. *International Journal of Mechanical Sciences*, *122*, 318–330. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.01.035

Shafiei, M., & Khaji, N. (2011). Analytical solutions for free and forced vibrations of a multiple cracked Timoshenko beam subject to a concentrated moving load. *Acta Mechanica*, *221*(1–2), 79–97. https://doi.org/10.1007/s00707-011-0495-x

Sorrentino, S., Fasana, A., & Marchesiello, S. (2007). Analysis of non-homogeneous Timoshenko beams with generalized damping distributions. *Journal of Sound and Vibration*, *304*(3–5), 779–792. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.03.038

Xu, D., Du, J., & Liu, Z. (2019). An accurate and efficient series solution for the longitudinal vibration of elastically restrained rods with arbitrarily variable cross sections. *Journal of Low Frequency Noise Vibration and Active Control*, *38*(2), 403–414. https://doi.org/10.1177/1461348419825913/FORMAT/EPUB

Yardimoglu, B., & Aydin, L. (2011). Exact longitudinal vibration characteristics of rods with variable cross-sections. *Shock and Vibration*, *18*, 555–562. https://doi.org/10.3233/SAV-2010-0561

Yuan, J., Pao, Y.-H., & Chen, W. (2016). Exact solutions for free vibrations of axially inhomogeneous Timoshenko beams with variable cross section. *Acta Mechanica*, *227*(9), 2625–2643. https://doi.org/10.1007/s00707-016-1658-6

Zeng, H., & Bert, C. W. (2001). Vıbratıon analysis of a tapered bar by differential transformation. *Journal of Sound and Vibration*, *242*(4), 737–739. https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3372

Zietsman, L., van Rensburg, N. F. J., & van der Merwe, A. J. (2004). A Timoshenko beam with tip body and boundary damping. *Wave Motion*, *39*(3), 199–211. https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2003.08.003

EKLER

EK 1 Riccati Diferansiyel Denklemi Çözümü İçin Özet Bilgi

EK 2 Diklik Şartının Elde Edilmesi

EK 3 Matlab Programları

EK 1. Riccati Diferansiyel Denklemi Çözümü İçin Özet Bilgi

Riccati tipindeki diferansiyel denklemlerin çözümü için Pala ve Ertas (2017) yeni bir yöntem sunmuştur. Çubukların boyuna titreşimi incelenirken bazı kesit tipleri için bu tip denklemlerin çözümlerinin bulunabilmesi açısından önemli olan bahsedilen çalışmanın özet bilgisi aşağıdaki gibidir:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y + Q(x)y^2 - R(x) = 0$$

şeklinde olan genel Riccati denkleminin çözümü için

$$\overline{y} = fe^{\int g(x)y(x)dx}$$

dönüşümü önerilir ve bu denklem iki kere türevi alınıp düzenlenirse

$$y' + \left[\frac{2f'}{f} + \frac{g'}{g}\right]y + gy^2 + \frac{f''}{fg} = \frac{1}{fg}\overline{y}''e^{-\int g(x)y(x)dx}$$

olarak bulunur.

$$s(x) = \frac{1}{fg}\overline{y}''e^{-\int g(x)y(x)dx}$$

tanımlaması yapılırsa

$$y' + \left[\frac{2f'}{f} + \frac{g'}{g}\right]y + gy^2 + \frac{f''}{fg} = s(x)$$

olur. Bulunan bu denklem ile genel ifade kıyaslanırsa

$$\left[\frac{2f'}{f} + \frac{g'}{g}\right] = P(x)$$

$$g(x) = Q(x)$$

$$s(x) - \frac{f''}{fg} = R(x)$$

olduğu görülebilir. Bu eşitliklerden $P(x), Q(x)$ ve $R(x)$ ifadelerine göre $f(x), g(x)$ ve $s(x)$ bulunabilir. Daha önce $s(x) = \frac{1}{fg}\overline{y}'' e^{-\int g(x)y(x)dx}$ tanımlaması yapılmıştı. Bu denklem $\overline{y} = fe^{\int g(x)y(x)dx}$ olduğu da hatırlanarak düzenlenirse

$$\overline{y}'' - s(x)g(x)\overline{y} = 0$$

şeklinde bulunur. g ve s'nin ifadelerine bağlı olarak, bu denklemin çözümü hakkında fikir sahibi olunabilir. Çözüm sonrası $\overline{y}$ elde edilir. $\overline{y} = fe^{\int g(x)y(x)dx}$ tanımlaması kullanılarak, ters dönüşüm ile bulunmak istenen çözüm

$$y(x) = \frac{1}{g(x)}\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\frac{\overline{y}(x)}{f(x)}\right)\right)$$

şeklinde elde edilir.

EK 2. Diklik Şartının Elde Edilmesi

(3.142) denklemindeki ifadeler (3.108) denkleminde eşitliğin sağ tarafındaki ilgili yerlere yazılırsa,

$$(\Omega_l^2-\Omega_m^2)\int_0^1\left(AEY_lY_m+\frac{EI}{L^2}\Psi_l\Psi_m\right)d\xi$$
$$=kAG\left(-F_{R2,m}Y_m(1)Y_l(1)-F_{R1,m}Y_m(0)Y_l(0)+F_{R2,l}Y_l(1)Y_m(1)\right.$$
$$\left.+F_{R1,l}Y_l(0)Y_m(0)\right)$$
$$+\frac{EI}{L^2}\left(-M_{R2,m}\Psi_m(1)\Psi_l(1)-M_{R1,m}\Psi_m(0)\Psi_l(0)+M_{R2,l}\Psi_l(1)\Psi_m(1)\right.$$
$$\left.+M_{R1,l}\Psi_l(0)\Psi_m(0)\right)$$

eşitliği elde edilir. Düzenleme yapılarak

$$(\Omega_l^2-\Omega_m^2)\int_0^1\left(AEY_lY_m+\frac{EI}{L^2}\Psi_l\Psi_m\right)d\xi$$
$$=kAG\left(Y_m(1)Y_l(1)\left(F_{R2,l}-F_{R2,m}\right)+Y_m(0)Y_l(0)\left(F_{R1,l}-F_{R1,m}\right)\right)$$
$$+\frac{EI}{L^2}\left(\Psi_l(1)\Psi_m(1)\left(M_{R2,l}-M_{R2,m}\right)+\Psi_l(0)\Psi_m(0)\left(M_{R1,l}-M_{R1,m}\right)\right)$$

olarak yazılabilir. Takip kolaylığı için ara işlemler kısım kısım ele alınsın.

$$F_{R2,l}-F_{R2,m}=d_{2,1}+i\Omega_l d_{2,2}+\frac{{\Omega_l}^2 d_{M2}\left(d_{02,1}+i\Omega_l d_{02,2}\right)}{{\Omega_l}^2 d_{M2}-d_{02,1}-i\Omega_l d_{02,2}}-d_{2,1}-i\Omega_m d_{2,2}$$
$$-\frac{{\Omega_m}^2 d_{M2}\left(d_{02,1}+i\Omega_m d_{02,2}\right)}{{\Omega_m}^2 d_{M2}-d_{02,1}-i\Omega_m d_{02,2}}$$

$$F_{R2,l} - F_{R2,m} = (\Omega_l - \Omega_m) i d_{2,2} + \frac{\Omega_l^2 d_{M2} d_{02,1}}{{\Omega_l}^2 d_{M2} - d_{02,1} - i\Omega_l d_{02,2}} + \frac{\Omega_l^2 d_{M2} i\Omega_l d_{02,2}}{\Omega_l^2 d_{M2} - d_{02,1} - i\Omega_l d_{02,2}} - \frac{\Omega_m^2 d_{M2} d_{02,1}}{\Omega_m^2 d_{M2} - d_{02,1} - i\Omega_m d_{02,2}} - \frac{\Omega_m^2 d_{M2} i\Omega_m d_{02,2}}{\Omega_m^2 d_{M2} - d_{02,1} - i\Omega_m d_{02,2}}$$

$$a_1 = \left(\frac{\Omega_l^2}{\Omega_l^2 d_{M2} - d_{02,1} - i\Omega_l d_{02,2}} - \frac{\Omega_m^2}{\Omega_m^2 d_{M2} - d_{02,1} - i\Omega_m d_{02,2}} \right)$$

$$a_2 = \left(\frac{\Omega_l^3}{\Omega_l^2 d_{M2} - d_{02,1} - i\Omega_l d_{02,2}} - \frac{\Omega_m^3}{\Omega_m^2 d_{M2} - d_{02,1} - i\Omega_m d_{02,2}} \right)$$

olmak üzere

$$F_{R2,l} - F_{R2,m} = (\Omega_l - \Omega_m) i d_{2,2} + a_1 d_{M2} d_{02,1} + i a_2 d_{M2} d_{02,2}$$

şeklinde yazılabilir. a_1 ve a_2 ifadeleri biraz daha düzenlenirse

$$a_1 = \frac{\Omega_l^2 \Omega_m^2 d_{M2} - \Omega_l^2 d_{02,1} - i\Omega_l^2 \Omega_m d_{02,2} - \Omega_m^2 \Omega_l^2 d_{M2} + \Omega_m^2 d_{02,1} + i\Omega_l \Omega_m^2 d_{02,2}}{\left(\Omega_l^2 d_{M2} - d_{02,1} - i\Omega_l d_{02,2}\right)\left(\Omega_m^2 d_{M2} - d_{02,1} - i\Omega_m d_{02,2}\right)}$$

$$a_1 = \frac{-(\Omega_l^2 - \Omega_m^2) d_{02,1} - i\Omega_l \Omega_m d_{02,2} (\Omega_l - \Omega_m)}{\left(\Omega_l^2 d_{M2} - d_{02,1} - i\Omega_l d_{02,2}\right)\left(\Omega_m^2 d_{M2} - d_{02,1} - i\Omega_m d_{02,2}\right)}$$

ve benzer olarak

$$a_2 = \frac{\Omega_l^3 \Omega_m^2 d_{M2} - \Omega_l^3 d_{02,1} - i\Omega_l^3 \Omega_m d_{02,2} - \Omega_m^3 \Omega_l^2 d_{M2} + \Omega_m^3 d_{02,1} + i\Omega_m^3 \Omega_l d_{02,2}}{\left(\Omega_l^2 d_{M2} - d_{02,1} - i\Omega_l d_{02,2}\right)\left(\Omega_m^2 d_{M2} - d_{02,1} - i\Omega_m d_{02,2}\right)}$$

$$a_2 = \frac{\Omega_l^2 \Omega_m^2 d_{M2} (\Omega_l - \Omega_m) - (\Omega_l^3 - \Omega_m^3) d_{02,1} - (\Omega_l^2 - \Omega_m^2) i\Omega_l \Omega_m d_{02,2}}{\left(\Omega_l^2 d_{M2} - d_{02,1} - i\Omega_l d_{02,2}\right)\left(\Omega_m^2 d_{M2} - d_{02,1} - i\Omega_m d_{02,2}\right)}$$

bulunur. Bu ifadeler yerlerine yazılarak

$$F_{R2,l} - F_{R2,m}$$
$$= (\Omega_l - \Omega_m) i d_{2,2} + \frac{-(\Omega_l^2 - \Omega_m^2) d_{M2} d_{02,1}^2 - i\Omega_l \Omega_m d_{M2} d_{02,1} d_{02,2} (\Omega_l - \Omega_m)}{\left(\Omega_l^2 d_{M2} - d_{02,1} - i\Omega_l d_{02,2}\right)\left(\Omega_m^2 d_{M2} - d_{02,1} - i\Omega_m d_{02,2}\right)}$$
$$+ \frac{i\Omega_l^2 \Omega_m^2 d_{M2}^2 d_{02,2} (\Omega_l - \Omega_m) - (\Omega_l^3 - \Omega_m^3) i d_{M2} d_{02,2} d_{02,1} + (\Omega_l^2 - \Omega_m^2) \Omega_l \Omega_m d_{M2} d_{02,2}^2}{\left(\Omega_l^2 d_{M2} - d_{02,1} - i\Omega_l d_{02,2}\right)\left(\Omega_m^2 d_{M2} - d_{02,1} - i\Omega_m d_{02,2}\right)}$$

$$F_{R2,l} - F_{R2,m} = (\Omega_l - \Omega_m)\left(i d_{2,2} - \frac{(\Omega_l + \Omega_m) d_{M2} d_{02,1}^2}{\Gamma_2} - \frac{i\Omega_l \Omega_m d_{M2} d_{02,1} d_{02,2}}{\Gamma_2} \right.$$
$$+ \frac{i\Omega_l^2 \Omega_m^2 d_{M2}^2 d_{02,2}}{\Gamma_2} - \frac{(\Omega_l^2 + \Omega_l \Omega_m + \Omega_m^2) i d_{M2} d_{02,2} d_{02,1}}{\Gamma_2}$$
$$\left. + \frac{(\Omega_l + \Omega_m) \Omega_l \Omega_m d_{M2} d_{02,2}^2}{\Gamma_2} \right)$$

$$F_{R2,l} - F_{R2,m} = (\Omega_l - \Omega_m)\left(i d_{2,2} - \frac{(\Omega_l + \Omega_m) d_{M2} d_{02,1}^2}{\Gamma_2} - \frac{2i\Omega_l \Omega_m d_{M2} d_{02,1} d_{02,2}}{\Gamma_2} \right.$$
$$+ \frac{i\Omega_l^2 \Omega_m^2 d_{M2}^2 d_{02,2}}{\Gamma_2} - \frac{(\Omega_l^2 + \Omega_m^2) i d_{M2} d_{02,2} d_{02,1}}{\Gamma_2}$$
$$\left. + \frac{(\Omega_l + \Omega_m) \Omega_l \Omega_m d_{M2} d_{02,2}^2}{\Gamma_2} \right)$$

$$F_{R2,l} - F_{R2,m} = \left(\Omega_l^2 \right.$$
$$\left. - \Omega_m^2\right)\left(i\left(\frac{d_{2,2}}{(\Omega_l + \Omega_m)} - \frac{2\Omega_l \Omega_m d_{M2} d_{02,1} d_{02,2}}{(\Omega_l + \Omega_m)\Gamma_2} + \frac{\Omega_l^2 \Omega_m^2 d_{M2}^2 d_{02,2}}{(\Omega_l + \Omega_m)\Gamma_2} \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\left(\Omega_l^2 + \Omega_m^2\right) d_{M2} d_{02,2} d_{02,1}}{(\Omega_l + \Omega_m)\Gamma_2} \right) - \frac{d_{M2} d_{02,1}^2}{\Gamma_2} + \frac{\Omega_l \Omega_m d_{M2} d_{02,2}^2}{\Gamma_2} \right)$$

elde edilir. Burada

$$\Gamma_2 = \left(\Omega_l^2 d_{M2} - d_{02,1} - i\Omega_l d_{02,2}\right)\left(\Omega_m^2 d_{M2} - d_{02,1} - i\Omega_m d_{02,2}\right)$$

olarak tanımlanmıştır. Benzer işlem adımları ile $F_{R1,l} - F_{R1,m}$ eşitliği

$$F_{R1,l} - F_{R1,m} = \left(\Omega_l^2 \right.$$
$$\left. - \Omega_m^2\right)\left(i\left(\frac{d_{1,2}}{(\Omega_l + \Omega_m)} - \frac{2\Omega_l\Omega_m d_{01,2} d_{M1} d_{01,1}}{(\Omega_l + \Omega_m)\Gamma_1} + \frac{\Omega_l^2\Omega_m^2 d_{M1}^2 d_{01,2}}{(\Omega_l + \Omega_m)\Gamma_1}\right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\left(\Omega_l^2 + \Omega_m^2\right) d_{M1} d_{01,2} d_{01,1}}{(\Omega_l + \Omega_m)\Gamma_1}\right) - \frac{d_{M1} d_{01,1}^2}{\Gamma_1} + \frac{\Omega_l\Omega_m d_{M1} d_{01,2}^2}{\Gamma_1}\right)$$

olarak bulunabilir. Burada

$$\Gamma_1 = \left(\Omega_l^2 d_{M1} - d_{01,1} - i\Omega_l d_{01,2}\right)\left(\Omega_m^2 d_{M1} - d_{01,1} - i\Omega_m d_{01,2}\right)$$

olarak tanımlanmıştır.

$$M_{R2,l} - M_{R2,m} = d_{R2,1} + i\Omega_l d_{R2,2} - d_{R2,1} - i\Omega_m d_{R2,2}$$

$$M_{R2,l} - M_{R2,m} = (\Omega_l^2 - \Omega_m^2)\frac{i d_{R2,2}}{(\Omega_l + \Omega_m)}$$

ve yine benzer olarak

$$M_{R1,l} - M_{R1,m} = (\Omega_l^2 - \Omega_m^2)\frac{i d_{R1,2}}{(\Omega_l + \Omega_m)}$$

elde edilir. Bulunan ifadeler ana denklemde yerlerine yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$(\Omega_l^2 - \Omega_m^2)\left(\int_0^1 \left(AEY_lY_m + \frac{EI}{L^2}\Psi_l\Psi_m\right)d\xi\right.$$

$$- kAG\left(Y_m(1)Y_l(1)\left(i\left(\frac{d_{2,2}}{(\Omega_l+\Omega_m)} - \frac{2\Omega_l\Omega_m d_{M2}d_{02,1}d_{02,2}}{(\Omega_l+\Omega_m)\Gamma_2}\right.\right.\right.$$

$$+ \frac{\Omega_l^2\Omega_m^2 d_{M2}^2 d_{02,2}}{(\Omega_l+\Omega_m)\Gamma_2} - \frac{(\Omega_l^2+\Omega_m^2)d_{M2}d_{02,2}d_{02,1}}{(\Omega_l+\Omega_m)\Gamma_2}\Big) - \frac{d_{M2}d_{02,1}^2}{\Gamma_2}$$

$$\left.+ \frac{\Omega_l\Omega_m d_{M2}d_{02,2}^2}{\Gamma_2}\right)$$

$$+ Y_m(0)Y_l(0)\left(i\left(\frac{d_{1,2}}{(\Omega_l+\Omega_m)} - \frac{2\Omega_l\Omega_m d_{01,2}d_{M1}d_{01,1}}{(\Omega_l+\Omega_m)\Gamma_1} + \frac{\Omega_l^2\Omega_m^2 d_{M1}^2 d_{01,2}}{(\Omega_l+\Omega_m)\Gamma_1}\right.\right.$$

$$\left.\left.- \frac{(\Omega_l^2+\Omega_m^2)d_{M1}d_{01,2}d_{01,1}}{(\Omega_l+\Omega_m)\Gamma_1}\right) - \frac{d_{M1}d_{01,1}^2}{\Gamma_1} + \frac{\Omega_l\Omega_m d_{M1}d_{01,2}^2}{\Gamma_1}\right)\Big)$$

$$\left.- \frac{EI}{L^2}\left(\Psi_l(1)\Psi_m(1)\left(\frac{id_{R2,2}}{(\Omega_l+\Omega_m)}\right) + \Psi_l(0)\Psi_m(0)\left(\frac{id_{R1,2}}{(\Omega_l+\Omega_m)}\right)\right)\right)$$

$$= 0$$

EK 3. Matlab Programları

```
function [dogal_frekans,T,fonk] =
esnekBCs_catlakli(kiris_yukseklik,kiris_derinlik,L,e,E,nu,yay_kutle_da
mper,k,alpha,BCs,frekans_ust_sinir,artis_miktari)

% BCs=[d_11 d_12 d_R11 d_R12;d_21 d_22 d_R21 d_R22] şeklinde
girilmeli.
% yay_kutle_damper=[d_M1 d_o11 d_o12;d_M2 d_o21 d_o22] şeklinde
girilmeli.

syms Omega xi

% ######################## SINIR ŞARTLARI ######################

d_11=BCs(1,1);
d_12=BCs(1,2);
d_R11=BCs(1,3);
d_R12=BCs(1,4);
d_21=BCs(2,1);
d_22=BCs(2,2);
d_R21=BCs(2,3);
d_R22=BCs(2,4);

if numel(yay_kutle_damper)==0
    d_M1=0;
    d_o11=1e-9;
    d_o21=1e-10;
    d_M2=0;
    d_o12=1e-9;
    d_o22=1e-10;
else
    d_M1=yay_kutle_damper(1,1);
    d_o11=yay_kutle_damper(1,2);
    d_o12=yay_kutle_damper(1,3);
    d_M2=yay_kutle_damper(2,1);
    d_o21=yay_kutle_damper(2,2);
    d_o22=yay_kutle_damper(2,3);
end


% ######################## ************** ######################

catlak_sayisi=length(e);
if length(alpha)==catlak_sayisi

    I=kiris_derinlik*(kiris_yukseklik^3)/12;
    A=kiris_yukseklik*kiris_derinlik;
    G=E/((2*(1+nu)));

    P=Omega^2*(E/(k*G)+1);
    Q=Omega^2*(Omega^2*E/(k*G)-A*L^2/I);
    Delta=P^2-4*Q;
    beta_1=sqrt((P+sqrt(Delta))/2);
    beta_2=sqrt((-P+sqrt(Delta))/2);
```

```
    m1_c=Omega^2*E/(k*G)-beta_1^2;
    m2_c=Omega^2*E/(k*G)+beta_2^2;
    m_1=m1_c/beta_1;
    m_2=m2_c/beta_2;


    q=(alpha./(1-alpha)).^2.*(-0.22+3.82*alpha+1.54*alpha.^2-
14.64*alpha.^3+9.6*alpha.^4);
    theta=2*(alpha./(1-alpha)).^2.*(5.93-19.69.*alpha+37.14.*alpha.^2-
35.84*alpha.^3+13.12*alpha.^4);
    C_q=kiris_yukseklik*q/(E*A);
    C_m=kiris_yukseklik*theta/(E*I);


    segment_sayisi=catlak_sayisi+1;
    segment_nok=[0 e 1];
    C_qn=[C_q 0];
    C_mn=[C_m 0];
    T=eye(4);

    for sayac=1:segment_sayisi

        YPsi=[sin(beta_1*(xi-segment_nok(sayac))) cos(beta_1*(xi-
segment_nok(sayac))) sinh(beta_2*(xi-segment_nok(sayac)))
cosh(beta_2*(xi-segment_nok(sayac)));-m_1*cos(beta_1*(xi-
segment_nok(sayac))) m_1*sin(beta_1*(xi-segment_nok(sayac)))
m_2*cosh(beta_2*(xi-segment_nok(sayac))) m_2*sinh(beta_2*(xi-
segment_nok(sayac)))];
        M=[beta_1*m_1*sin(beta_1*(xi-segment_nok(sayac)))
beta_1*m_1*cos(beta_1*(xi-segment_nok(sayac)))
beta_2*m_2*sinh(beta_2*(xi-segment_nok(sayac)))
beta_2*m_2*cosh(beta_2*(xi-segment_nok(sayac)))];
        V=[(beta_1+m_1)*cos(beta_1*(xi-segment_nok(sayac))) -
(beta_1+m_1)*sin(beta_1*(xi-segment_nok(sayac))) (beta_2-
m_2)*cosh(beta_2*(xi-segment_nok(sayac))) (beta_2-
m_2)*sinh(beta_2*(xi-segment_nok(sayac)))];
        B=[YPsi;M;V];

        D=inv([1 0 0 -k*A*G*C_qn(sayac)/L;0 1 -E*I*C_mn(sayac)/L 0;0 0
1 0;0 0 0 1]);

        T1=D*subs(B,xi,segment_nok(sayac+1));
        Un=T1*inv(subs(B,xi,segment_nok(sayac)));

        T=Un*T;
    end

    % ######################  MESNETLER  ############################


F_R1=d_11+1i*Omega*d_12+(Omega^2*d_M1*(d_o11+1i*Omega*d_o12)/(Omega^2*
d_M1-d_o11-1i*Omega*d_o12));

F_R2=d_21+1i*Omega*d_22+(Omega^2*d_M2*(d_o21+1i*Omega*d_o22)/(Omega^2*
d_M2-d_o21-1i*Omega*d_o22));
```

```
    M_R1=(d_R11+1i*Omega*d_R12);
    M_R2=(d_R21+1i*Omega*d_R22);


    S=T*[1 0;0 1;0 M_R1;F_R1 0]; % S matrisinin bulunması

    Lambda=[0 -M_R2;-F_R2 0]*[S(1,1) S(1,2);S(2,1) S(2,2)]-[S(3,1)
S(3,2);S(4,1) S(4,2)]; % \Lambda matrisinin bulunması

    fonk=Lambda(1,1)*Lambda(2,2)-Lambda(1,2)*Lambda(2,1);

    % ######################  *********  ############################
    fprintf('Frekanslar için çözülecek denklem elde edildi...\n')
    dogal_frekans=imajiner_beam_kokler(fonk, frekans_ust_sinir,
artis_miktari);

else
    fprintf('çatlak derinliği için verilen değerler çatlak sayısı ile
uyumsuz.')
end
end
```

```
function boyutsuz_dogal_frekans = imajiner_beam_kokler(fonk,
ust_sinir_Omega, artis_miktari)
syms omegacizgi
fonk_y=subs(fonk,symvar(fonk),omegacizgi);
anonymous_fonk=matlabFunction(fonk_y);
if isempty(artis_miktari)==1
    artis_miktari=0.0002;
end
Rekok=0:artis_miktari:ust_sinir_Omega(1);
Imkok=0:artis_miktari:ust_sinir_Omega(2);
[X,Y]=meshgrid(Rekok,Imkok);
kok=X+1i*Y;
fprintf('çözüm öneri noktaları oluşturuldu...\n')
fonk_sonuclar=anonymous_fonk(kok);
fprintf('Çözüm öneri noktalarının fonksiyon karşılıkları bulundu.\n
Sıfırı kesen noktalar elde ediliyor...\n')
aranacak_degerler=abs(fonk_sonuclar);
TF_1=islocalmin(aranacak_degerler,1); % kolonlardaki lokal minimumları
buluyor
TF_2=islocalmin(aranacak_degerler,2); % satırlardaki lokal minimumları
buluyor.
kok_ilkkolon=kok(:,1);
kok_ilksatir=kok(1,:);
muhtemel_kokler=sort([kok(TF_1.*TF_2==1);kok_ilkkolon(TF_1(:,1)==1);co
mplex(kok_ilksatir(TF_2(1,:)==1))'],'ComparisonMethod','real');
fprintf('Muhtemel %d kök bulundu.\n Doğruluğu kontrol ediliyor ve
kesin sonuçlar bulunuyor.\n',length(muhtemel_kokler))
if isempty(muhtemel_kokler)==0
    kok_sonuc=zeros(1,length(muhtemel_kokler));
    for say=1:length(muhtemel_kokler)
        kok_sonuc(say)=vpasolve(fonk_y,muhtemel_kokler(say));
        fprintf('*** %d. kök bulundu.\n',say)
    end
    boyutsuz_dogal_frekans=kok_sonuc;     % boyutsuz doğal frekanslar:
\Omega
else
    fprintf('bu aralıklarda çözüm bulunamadı. \n 1) Sınırlar
genişletilebilir\n 2) Çözüm noktaları sıklaştırılabilir ( şu an
sınırlar %4.4f+%4.4fi artış miktarı %4.2f
)...\n',[ust_sinir_Omega(1),ust_sinir_Omega(2),artis_miktari])
end
end
```

```
function [Y_sonuc,C_matris] = mod_sekilleri(T, BCs, Omega_al,
kiris_yukseklik, kiris_derinlik, L, e, E, nu, yay_kutle_damper, k,
alpha)
fgr=figure('DefaultAxesFontSize',20);
for syc=1:length(Omega_al)
    Omega=Omega_al(syc)
    clc
    fprintf('\n############  Mod şekilleri hesaplanıyor
###############\n-------------------------------------------------\n')
    syms xi

    % ######################## SINIR ŞARTLARI ######################

d_11=BCs(1,1);
d_12=BCs(1,2);
d_R11=BCs(1,3);
d_R12=BCs(1,4);
d_21=BCs(2,1);
d_22=BCs(2,2);
d_R21=BCs(2,3);
d_R22=BCs(2,4);

if numel(yay_kutle_damper)==0
    d_M1=0;
    d_o11=1e-9;
    d_o21=1e-10;
    d_M2=0;
    d_o12=1e-9;
    d_o22=1e-10;
else
    d_M1=yay_kutle_damper(1,1)
    d_o11=yay_kutle_damper(1,2);
    d_o12=yay_kutle_damper(1,3);
    d_M2=yay_kutle_damper(2,1);
    d_o21=yay_kutle_damper(2,2);
    d_o22=yay_kutle_damper(2,3);
end

    % ######################## ************** ######################

    % Çatlak ve parça sayısı

    catlak_sayisi=length(e);
    segment_sayisi=catlak_sayisi+1;

    I=kiris_derinlik*(kiris_yukseklik^3)/12;
    A=kiris_yukseklik*kiris_derinlik;
    G=E/((2*(1+nu)));
    % Boyutsuz Parametrelerin Hesabı
    P=Omega^2*(E/(k*G)+1);
    Q=Omega^2*(Omega^2*E/(k*G)-A*L^2/I);
    Delta=P^2-4*Q;
    beta_1=sqrt((P+sqrt(Delta))/2);
    beta_2=sqrt((-P+sqrt(Delta))/2);

    m1_c=Omega^2*E/(k*G)-beta_1^2;
    m2_c=Omega^2*E/(k*G)+beta_2^2;
```

```
    m_1=m1_c/beta_1;
    m_2=m2_c/beta_2;

    % Çatlak bölgesi için hesaplar :

    q=(alpha./(1-alpha)).^2.*(-0.22+3.82*alpha+1.54*alpha.^2-
14.64*alpha.^3+9.6*alpha.^4);
    theta=2*(alpha./(1-alpha)).^2.*(5.93-19.69.*alpha+37.14.*alpha.^2-
35.84*alpha.^3+13.12*alpha.^4);
    C_q=kiris_yukseklik*q/(E*A);
    C_m=kiris_yukseklik*theta/(E*I);

    segment_nok=[0 e 1]; % bölünmüş parçaların noktaları.
    C_qn=[C_q 0];
    C_mn=[C_m 0];

    % Segmentlerdeki B ve D matrislerinin elde edilmesi

    syms xi
    B=cell(segment_sayisi,1);
    D=cell(catlak_sayisi,1);

    for sayac=1:segment_sayisi

        YPsi=[sin(beta_1*(xi-segment_nok(sayac))) cos(beta_1*(xi-
segment_nok(sayac))) sinh(beta_2*(xi-segment_nok(sayac)))
cosh(beta_2*(xi-segment_nok(sayac)));-m_1*cos(beta_1*(xi-
segment_nok(sayac))) m_1*sin(beta_1*(xi-segment_nok(sayac)))
m_2*cosh(beta_2*(xi-segment_nok(sayac))) m_2*sinh(beta_2*(xi-
segment_nok(sayac)))];
        M=diff(YPsi(2,:),xi);
        V=(diff(YPsi(1,:),xi)-YPsi(2,:));
        B{sayac,1}=[YPsi;M;V];
        D{sayac,1}=inv([1 0 0 -k*A*G*C_qn(sayac)/L;0 1 -
E*I*C_mn(sayac)/L 0;0 0 1 0;0 0 0 1]);
    end
    clear sayac


F_R1=d_11+1i*Omega*d_12+(Omega^2*d_M1*(d_o11+1i*Omega*d_o12)/(Omega^2*
d_M1-d_o11-1i*Omega*d_o12));

F_R2=d_21+1i*Omega*d_22+(Omega^2*d_M2*(d_o21+1i*Omega*d_o22)/(Omega^2*
d_M2-d_o21-1i*Omega*d_o22));
    M_R1=(d_R11+1i*Omega*d_R12);
    M_R2=(d_R21+1i*Omega*d_R22);
    e_n=e(length(e));
    h1=[(beta_1+m_1) 0 (beta_2-m_2) 0]-F_R1*[0 1 0 1];
    h2=[0 beta_1*m_1 0 beta_2*m_2]-M_R1*[-m_1 0 m_2 0];
    h3=[(beta_1+m_1)*cos(beta_1*(1-e_n)) -(beta_1+m_1)*sin(beta_1*(1-
e_n)) (beta_2-m_2)*cosh(beta_2*(1-e_n)) (beta_2-m_2)*sinh(beta_2*(1-
e_n))];
    h4=F_R2*[sin(beta_1*(1-e_n)) cos(beta_1*(1-e_n)) sinh(beta_2*(1-
e_n)) cosh(beta_2*(1-e_n))];
    h5=[beta_1*m_1*sin(beta_1*(1-e_n)) beta_1*m_1*cos(beta_1*(1-e_n))
beta_2*m_2*sinh(beta_2*(1-e_n)) beta_2*m_2*cosh(beta_2*(1-e_n))];
```

```
    h6=M_R2*[-m_1*cos(beta_1*(1-e_n)) m_1*sin(beta_1*(1-e_n))
m_2*cosh(beta_2*(1-e_n)) m_2*sinh(beta_2*(1-e_n))];

h7_8=[h3+h4;h5+h6]*inv(subs(B{segment_sayisi,1},xi,1))*subs(T,symvar(T
),Omega)*subs(B{1,1},xi,0);
    katsayi_matris=double([h1;h2;h7_8]);

    % Katsayılar Matrisinin Oluşturulması. ( {C}={C_cizgi}*C_1,1 )

    C_cizgi=sym('C', [segment_sayisi 4]);
    C12_14=mldivide(katsayi_matris(:,2:4),-katsayi_matris(:,1));
    C_cizgi(1,:)=round([1 transpose(C12_14)],7);

    for sayacc=1:catlak_sayisi

C_cizgi(sayacc+1,:)=transpose(inv(subs(B{sayacc+1,1},xi,e(sayacc)))*D{
sayacc,1}*subs(B{sayacc,1},xi,e(sayacc))*transpose(C_cizgi(sayacc,:)))
;
    end
    C_cizgi=double(C_cizgi);
    clear sayacc

    % Ortogonalite şartlarının uygulanarak C_1 katsayısının bulunması
    Gamma_1=(Omega^2*d_M1-d_o11-1i*Omega*d_o12)^2;
    Gamma_2=(Omega^2*d_M2-d_o21-1i*Omega*d_o22)^2;
    Upsilon=-
k*A*G*((subs(B{segment_sayisi,1}(1,:),xi,1)*transpose(C_cizgi(segment_
sayisi,:)))^2*(1i*(d_22/(2*Omega)+Omega^3*d_M2^2*d_o22/(2*Gamma_2)-
2*Omega*d_M2*d_o22*d_o21/Gamma_2)-
d_M2*d_o21^2/Gamma_2+Omega^2*d_M2*d_o22^2/Gamma_2)...

+(subs(B{1,1}(1,:),xi,0)*transpose(C_cizgi(1,:)))^2*(1i*(d_12/(2*Omega
)+Omega^3*d_M1^2*d_o12/(2*Gamma_1)-2*Omega*d_M1*d_o12*d_o11/Gamma_1)-
d_M1*d_o11^2/Gamma_1+Omega^2*d_M1*d_o12^2/Gamma_1))...
        -
E*I/(L^2)*((subs(B{segment_sayisi,1}(2,:),xi,1)*transpose(C_cizgi(segm
ent_sayisi,:)))^2*1i*d_R22/(2*Omega)+(subs(B{1,1}(2,:),xi,0)*transpose
(C_cizgi(1,:)))^2*1i*d_R12/(2*Omega));

    integral_toplamlar_Y=0;
    integral_toplamlar_Psi=0;
    fprintf('\n normalleştirme işlemi yapılıyor....\n C_1 katsayısı
hesaplanmaya başladı\n')
    for sayac=1:segment_sayisi

integral_toplamlar_Y=integral_toplamlar_Y+int((B{sayac,1}(1,:)*transpo
se(C_cizgi(sayac,:)))^2,xi,segment_nok(sayac),segment_nok(sayac+1));
        fprintf('%d / %d . segment için Y_integral toplamı
hesaplandı\n',[sayac,segment_sayisi])

integral_toplamlar_Psi=integral_toplamlar_Psi+int((B{sayac,1}(2,:)*tra
nspose(C_cizgi(sayac,:)))^2,xi,segment_nok(sayac),segment_nok(sayac+1)
);
        fprintf('%d / %d . segment için Psi_integral toplamı
hesaplandı\n',[sayac,segment_sayisi])
    end
    fprintf('integral toplamı bulundu\n')
```

```
C1=double(sqrt(1/(A*E*integral_toplamlar_Y+E*I/(L^2)*integral_toplamla
r_Psi+Upsilon)));
    fprintf('C_1 bulundu')

    C_matris=C1*C_cizgi;
    Y_sonuc=cell(segment_sayisi,1);

    for sayacc=1:segment_sayisi

Y_sonuc{sayacc,:}=matlabFunction(B{sayacc,1}(1,:)*transpose(C_matris(s
ayacc,:)));

xi_y(sayacc,:)=linspace(segment_nok(sayacc),segment_nok(sayacc+1),1000
0);
        Y(sayacc,:)=real(Y_sonuc{sayacc,:}(xi_y(sayacc,:)));
    end
    cizgiKalinligi=1;
    markerBoyut=10;
    if syc==1
        pl1=plot(xi_y(1,:),Y(1,:),'-
','MarkerIndices',1:1000:length(Y(1,:)),'MarkerSize',markerBoyut,'Colo
r','k','LineWidth',cizgiKalinligi)
        hold on
        plot(xi_y(2,:),Y(2,:),'-
','MarkerIndices',1:1000:length(Y(2,:)),'MarkerSize',markerBoyut,'Colo
r','k','LineWidth',cizgiKalinligi)
    elseif syc==2
        pl2=plot(xi_y(1,:),Y(1,:),'-
*','MarkerIndices',1:1000:length(Y(1,:)),'MarkerSize',markerBoyut,'Col
or','k','LineWidth',cizgiKalinligi)
        plot(xi_y(2,:),Y(2,:),'-
*','MarkerIndices',1:1000:length(Y(2,:)),'MarkerSize',markerBoyut,'Col
or','k','LineWidth',cizgiKalinligi)
    elseif syc==3
        pl3=plot(xi_y(1,:),Y(1,:),'-
square','MarkerIndices',1:1000:length(Y(1,:)),'MarkerSize',markerBoyut
,'Color','k','LineWidth',cizgiKalinligi)
        plot(xi_y(2,:),Y(2,:),'-
square','MarkerIndices',1:1000:length(Y(2,:)),'MarkerSize',markerBoyut
,'Color','k','LineWidth',cizgiKalinligi)
    elseif syc==4
        pl4=plot(xi_y(1,:),Y(1,:),'-
o','MarkerIndices',1:1000:length(Y(1,:)),'MarkerSize',markerBoyut,'Col
or','k','LineWidth',cizgiKalinligi)
        plot(xi_y(2,:),Y(2,:),'-
o','MarkerIndices',1:1000:length(Y(2,:)),'MarkerSize',markerBoyut,'Col
or','k','LineWidth',cizgiKalinligi)
    elseif syc==5
        pl5=plot(xi_y(1,:),Y(1,:),'-
diamond','MarkerIndices',1:1000:length(Y(1,:)),'MarkerSize',markerBoyu
t,'Color','k','LineWidth',cizgiKalinligi)
        plot(xi_y(2,:),Y(2,:),'-
diamond','MarkerIndices',1:1000:length(Y(2,:)),'MarkerSize',markerBoyu
t,'Color','k','LineWidth',cizgiKalinligi)
    end

end
```

```
hold off
xlabel('$\xi$',"Interpreter","latex",'FontSize',20)
ylabel('Re($Y(\xi)$)',"Interpreter","latex",'FontSize',20)
legend([pl1 pl2 pl3 pl4 pl5],{'1. Mod','2. Mod','3. Mod','4. Mod','5.
Mod'},'Orientation','horizontal','Location','north','FontSize',18)
fgr.Position=[0 0 900 620];
legend('boxoff')
end
```